

# 로버스트 필터를 이용한 EEG 신호의 스펙트럼 추정

김택수\* · 허재만\* · 김종순\* · 유선국\*\* · 박상희\*

= Abstract =

## Power Spectrum Estimation of EEG Signal Using Robust Filter

T. S. Kim\*, J. M. Huh\*, J. S. Kim\*, S. K. Yoo\*\*, and S. H. Park\*

Background EEG signals can be represented as the sum of a conventional AR process and an innovation process. It is know that conventional estimation techniques, such as least square estimates (LSE) or Gaussian maximum likelihood estimates (MLE-G) are optimal when the innovation process satisfies the Gaussian or presumed distribution. When the data are contaminated by outliers, however, these assumptions are not met and the power spectrum estimated by conventional estimation techniques may be fatally biased. EEG signal may be affected by artifacts, which are outliers in the statistical term. So the robust filtering estimation technique is used against those artifacts and it performs well for the contaminated EEG signal.

### 1. 서 론

시계열 (time series) 데이터의 주파수 성분, 즉 전력밀도 스펙트럼 (power density spectrum)을 추정할 때, 주로 Maximum likelihood method나 Least square method와 같은 고전적인 추정기법을 사용한다. 이들 방법은 데이터의 분포를 미리 알고 있거나, 혹은 데이터가 어떤 특정한 분포를 하고 있다고 가정을 한다. 따라서 데이터가 이러한 가정을 만족하는 분포를 갖는 경우에는 위의 두 가지 방법을 이용한 스펙트럼 추정이 적절하다 [1][2].

그러나 실제 여러가지 이유로 데이터가 이러한 가정분포를 벗어나는 ‘아웃라이어 (outlier)’가 자주 발생하게 되는데, 이 때 전력밀도의 크기가 상대적으로 작은 스펙트럼성분에 왜곡현상이 발생하여 Maximum likelihood method나 least square method와 같은 방법으로는 정확한 스펙트럼 추정을 할 수 없다 [3]-[5].

본 연구에서 처리하고자 하는 배경뇌파신호는 여러가지 원인으로 인하여 발생한 아티팩트 (artifact)에 의하여 오염되기 쉽다. 이는 외부의 전자기파 간섭, 전극의 접촉저항의 변화, 눈의 깜박임이나 동공의 움직임, 근육이나 심장 등의 활동에 의한 것들이다 [7]-[8]. 이러한 아티팩트들은 가정된 분포를 벗어난 아웃라이어로서 작용하게 되며, 따라서 기존의 추정방법으로는 스펙트럼의 왜곡현상을 피할 수 없다.

따라서 본 연구에서는 아티팩트에 의하여 오염

<접 수 : 1992년 5월 19일>

\*연세대학교 공과대학 전기공학과

\*\*순천향대학교 공과대학 전기공학과

\*Dept. of Electrical Eng., Yonsei University

\*\*Dept. of Electrical Eng., Soonchunhyang University

된 배경뇌파신호의 전력밀도 스펙트럼 추정시 발생하는 아웃라이어의 문제점을 해결하고 왜곡이 없는 정확한 전력밀도 스펙트럼을 추정하기 위하여 로버스트 필터링 알고리즘 (robust filtering algorithm)을 도입하고자 한다.

## 2. Outlier와 Robustness

가정된 분포를 벗어난 데이터를 통계적 용어로 '아웃라이어'라고 한다. 이러한 아웃라이어가 섞여 있을 때의 분포곡선과 가정된 분포곡선을 비교하면 그림 1과 같다 [3].

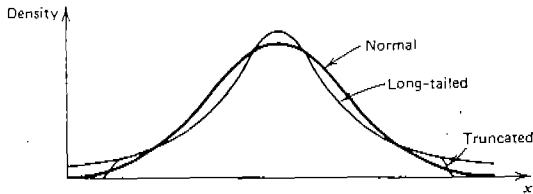


그림 1 아웃라이어 분포곡선  
Fig. 1 Distribution curve of outlier

그림 1에서 가정된 분포를 정규분포라 할 때, 분포곡선의 양 끝이 정규 분포보다 두터운 경우 '꼬리가 긴 (long-tailed) 분포'라 하고, 반대의 경우는 '꼬리가 잘린 (truncated) 분포'라 한다. 시계열 (time series) 데이터에서의 이러한 아웃라이어는 Least square 방법에 의한 추정이나 Maximum likelihood 방법에 의한 추정에 심각한 악영향을 끼친다. 따라서 이러한 아웃라이어에 의한 영향을 최소화할 수 있는 견실한 추정방법이 요구된다.

통계적 의미에서 견실한 추정 (robust estimation)을 정의하면 다음과 같다.

"F는 관측 데이터의 가정된 분포이고, {Gi}는 관측 데이터의 발생가능한 실제 분포의 집합이라고 하자. 단, 각 Gi는 F와 아주 동떨어진 분포는 아니다. 이 때, 만일 추정 T가 집합 {F}U{Gi}에 대하여 성능이 좋으면, 이 추정 T를 '견실하다 (robust)'라고 한다." 일반적으로 F는 가우시안 분포, {Gi}는 꼬리가 두꺼운 (heavy-tailed) 분포이다 [3][4].

## 3. Robust Filtering Algorithm

본 연구에서 이용하고자 하는 로버스트 필터의 알고리즘을 간략히 설명하면 다음과 같다.

우선 관측 데이터 값  $y_k$ 는 평균값이 '0'이라 가정한다. 식 (1)과 같이 자기회귀 (autoregression) 과정을 관측 데이터  $y_k$  ( $k=1, \dots, n$ )에 적용하여 반복과정을 시작한다.

$$y_k = \sum_{j=1}^p \phi_j y_{k-j} + e_k \quad \dots(1)$$

차수  $p$ 는 AIC (Akaike Information Criterion), FPE (Final Prediction Error), CAT (Criterion Autoregressive Transfer function)와 같은 차수 판정법에 의하여 결정한다.

식 (1)에서 얻은 파라미터  $\hat{\phi}^T = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p)$ 는 underlying process  $\{x_k\}$ 의 견실한 추정  $\{\hat{x}_k\}$ 을 얻기 위하여, 관측 데이터  $y_k$ 를 식 (2)와 같은 로버스트 필터를 적용하는데 사용된다.

$$\hat{x}_k = X_{k-1}^T + c \cdot \hat{s} \cdot \varphi \left[ \frac{\hat{y}_k - \hat{X}_{k-1}^T \hat{\phi}}{c \cdot \hat{s}} \right]$$

$$\hat{\phi}^T = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p)$$

$$\hat{X}_{k-1}^T = (\hat{x}_{k-1}, \hat{x}_{k-2}, \dots, \hat{x}_{k-p}) \quad \dots (2)$$

식 (2)에서  $\hat{s}^2$ 는  $x_k$ 의 innovation 분산  $\sigma^2$ 의 추정치이며,  $c$ 는 로버스트 필터의 성능을 조절하기 위한 상수이다. 첫번째 반복과정에서  $\hat{s}$ 는 예측 오차  $\{e_k\}$ 의 분산의 제곱근 값을 취한다.  $\varphi$ 는 연속 유한인 영향함수 (influence function)로서 아웃라이어를 제거하는 역할을 한다 [3], [9].

$y_k$ 가 아웃라이어를 포함하고 있으면, 초기 추정치  $\hat{\phi}^T, \hat{x}_k, \hat{s}$ 는 부정확한 값이다. 하지만 반복과정이 진행되는 동안 이 값들은 점차 개선된다. 한편 robustly prewhitened residual  $r_k$ 는 식 (3)에 의하여 구한다.

$$r_k = x_k - (\hat{\phi}_1 \hat{x}_{k-1} + \hat{\phi}_2 \hat{x}_{k-2} + \dots + \hat{\phi}_p \hat{x}_{k-p})$$

$$c \cdot s \cdot \varphi \left[ \frac{\hat{y}_k - \hat{X}_{k-1}^T \hat{\phi}}{c \cdot \hat{s}} \right] \quad \dots (3)$$

그리고 여기서 얻어진 residual  $r_k$ 는 새로운 추정치  $\hat{s}$ 를 계산하기 위하여 쓰여진다.  $\hat{x}_k$ 는 식 (1)에 대입하여 자기회귀 모델을 다시 적용한다. 식 (1)에서 식 (3)의 과정을 반복하여 추정값들,  $\hat{\phi}^T, \hat{x}_k, \hat{s}$ 들을 구한다. 이러한 반복과정은  $\hat{\phi}^T$ 의 변화가 작

아질 때, 즉 수렴할 때 까지 계속한다.

반복과정이 모두 완료되면 rk로부터 식 (4), (5), (6)에 의하여 평균 페리오도그램 (averaged periodogram)  $\bar{S}_r(f)$ 를 구한다.

$$R(f_1) = \sum_{k=1}^n r_k \exp(-i2\pi f_1 k)$$

$$f_1 = \frac{1}{n}, \quad 1=0, 1, \dots, \frac{n}{2} \quad \dots (4)$$

$$S_r(f) = |R(f_1)|^2/n \quad \dots (5)$$

$$\bar{S}_r(f) = \sum_{j=-L}^L w_j \hat{S}_r(f_{1+j})$$

$$w_j = w - j, \quad \sum_{j=-L}^L w_j = 1 \quad \dots (6)$$

최종적으로 식 (7)에 의하여 구하고자하는 전력 밀도 스펙트럼  $\bar{S}(f)$ 를 얻을 수 있다 [6].

$$\bar{S}(f) = \frac{S_r(f)}{|\bar{H}_F(f)|^2}$$

$$\bar{H}_F(f) = 1 - \hat{\phi}_1 \exp(i2\pi f) - \hat{\phi}_2 \exp(i2\pi 2f) - \dots - \hat{\phi}_p \exp(i2\pi pf) \quad \dots (7)$$

#### 4. 실험 및 결과고찰

실제의 EEG신호에 로버스트 필터링 알고리즘을 적용하기에 앞서 이상적인 전력밀도 스펙트럼을 알고 있는 두 가지 형태의 모의 데이터를 발생시켜 실험하고 그 타당성을 확인하여 보았다.

그 첫번째 모의 모델은 자기회귀과정 모델 (autoregressive model)이다. 두개의 2차 자기회귀 과정과 하나의 1차 자기회귀과정의 합으로 이루어진 이 모델은 식 (8)과 같다.

$$u_k = 0.975 u_{k-1} + \epsilon_k$$

$$w_k = 0.95 w_{k-1} - 0.9 w_{k-2} + \eta_k$$

$$z_k = 0.33 z_{k-1} - 0.9 z_{k-2} + \zeta_k$$

$$y_k = \sqrt{75} u_k + w_k + z_k, \quad k=1, 2, \dots, n \quad \dots (8)$$

$\epsilon_k, \eta_k, \zeta_k$ 는 각각  $N(0, 1)$ 인 분포를 갖고 세 과정의 합  $y_k$ 는 단위 분산을 갖도록 표준화 하였다.

그림 2는 자기회귀과정  $y_k$ 를 보인 것이고, 그림 3은 식 (8)의 관측 데이터  $y_k$ 를 로버스트 필터링 알고리즘을 적용하여 얻은 결과이다.

그림 3에서 (a)의  $\hat{\epsilon}_k$ 와  $r_k$ 는 각각 선형예측 오차와 로버스트 레지듀얼 오차 (robust residual error)이다. 그리고 (b)는 이상적인 전력밀도 스펙트럼, 기존의 Levinson 알고리즘을 이용하여 추정한 전력밀도 스펙트럼과 로버스트 필터링 알고리즘을 이용하여 추정한 전력밀도 스펙트럼을 비교한 것이고, (c)는 이상적인 전력밀도 스펙트럼, 8 블록 50% 중첩하여 얻은 페리오도그램 방법에 의한 전력밀도 스펙트럼, 로버스트 필터링 알고리즘에 의한 전력밀도 스펙트럼을 각각 비교한 것이다.

그림 4는 식 (8)의  $y_k$ 에 AO를 더한 것이다. 그리고 그림 5는 AO를 더하였을 때, 그림 3에서와 마찬가지로 (a)의  $\hat{\epsilon}_k$ 와  $r_k$ 는 각각 선형예측오차와 로버스트 레지듀얼 오차이고 (b)는 이상적인 전력 밀도 스펙트럼, Levinson 알고리즘을 이용한 전력 밀도 스펙트럼, 페리오도그램을 이용한 전력 밀도 스펙트럼, 로버스트 필터링 알고리즘을 이용한 전력 밀도 스펙트럼을 비교한 것이다.

아웃라이어 존재하지 않았을 때의 전력밀도 스펙트럼과 달리 아웃라이어가 섞이게 되면, Levinson 방법이나 페리오도그램 방법에 의한 전력 밀도 스펙트럼은 상당한 왜곡현상이 나타나는 것을 관찰할 수 있다. 또한 선형 예측 오차  $\hat{\epsilon}_k$ 에서 아웃라이어의 존재를 뚜렷히 구분할 수 있다.

두번째 모의 모델로서, L. H. Zetterberg (1975)의 EEG 스펙트럼 형성 필터를 이용하여 모의 뇌파신호를 발생시켜 실험하여 보았다 [10].

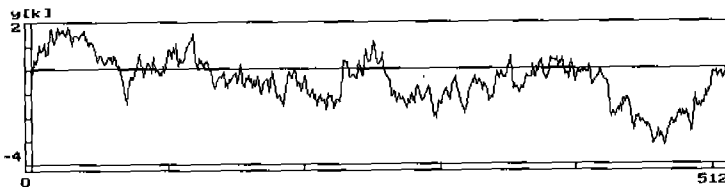
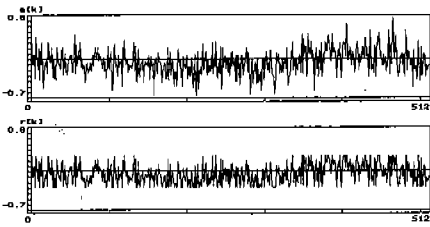
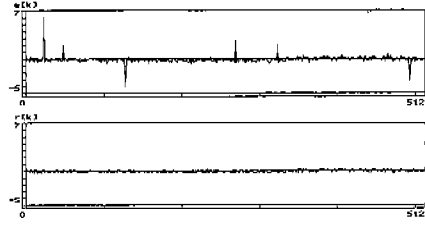


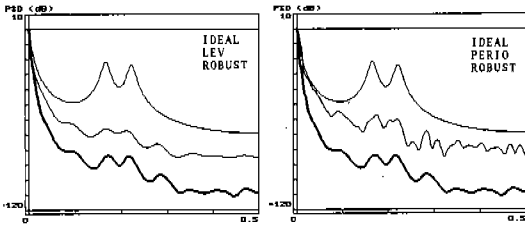
그림 2. 2 · AR(2)+AR(1) 과정  
Fig. 2. 2 · AR(2)+AR(1) process



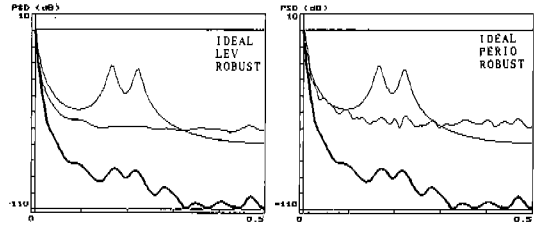
(a) Linear prediction error and robust residual



(a) Linear prediction error and robust residual



(b) Estimated power spectrum



(b) Estimated power spectrum

그림 3 아웃라이어가 없을 때의 2·AR(2)+AR(1) process의 전력밀도

그림 5 아웃라이어가 있을 때의 2·AR(2)+AR(1) process의 전력밀도 스펙트럼

Fig. 3 Power spectrum of 2·AR(2)+AR(1) process when outliers does not exit

Fig. 5 Power spectrum of 2·AR(2)+AR(1) process when outliers exit

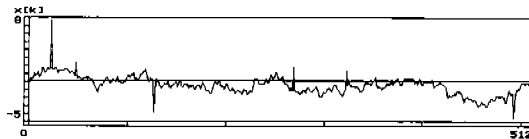


그림 4. 2·AR(2)+AR(1) process+additive outliers  
Fig. 4. 2·AR(2)+AR(1) process+additive outliers

$$H(s) = -k \frac{s + 2\pi\sigma_0}{s^2 + 4\pi\sigma_p s + (2\pi f_{op})^2}$$

$$\sigma_p = \sigma_i$$

$$f_{op}^2 = (f_i^2 + \sigma_i^2)$$

$$\sigma_0^2 = (f_i^2 + \sigma_i^2) - \frac{\sigma_i - f_i}{\sigma_i + f_i} \frac{H_i/G_i}{H_i/G_i} \quad \dots (9)$$

스펙트럼 형성 필터  $H(s)$ 에 의하여 발생된 모의 뇌파신호는 그림 6과 같다.

한편 모의 뇌파신호에 아웃라이어가 없을 때와 섞여 있을 때의 실험 결과는 각각 그림 7에서 그림 9와 같다. 자기회귀 과정 모델의 실험에서와 마

찬가지로 로버스트 필터링 알고리즘에 의한 전력 밀도 스펙트럼은 아웃라이어가 섞여 있을 때나 없을 때나 전력밀도 스펙트럼의 변화가 거의 없이 이상적인 전력밀도 스펙트럼의 모양을 제대로 추정하는 반면, Levinson 방법이나 페리오도그램 방법에 의한 전력밀도 스펙트럼은 아웃라이어가 존재하면 스펙트럼에 왜곡이 생겨 정확히 추정하지 못하는 것을 볼 수 있다.

한편, 표 1은 앞서 자기회귀 과정에 의해 얻은 데이터와 모의 뇌파신호를 이용한 실험을 통하여 얻은 AR계수, 평균값, 그리고 분산값을 각각 비교

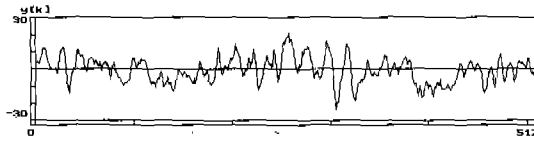
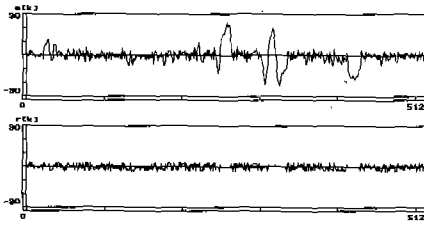
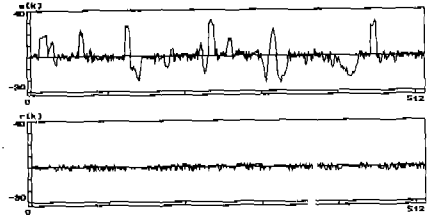


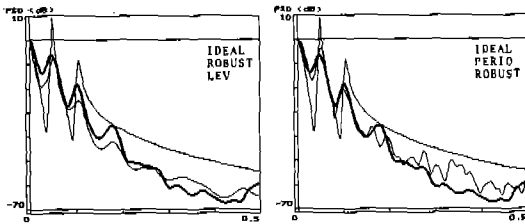
그림 6 모의 뇌파 신호  
Fig. 6 Simulated EEG signal



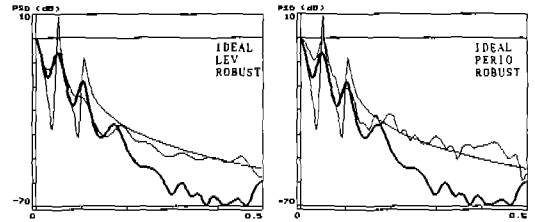
(a) Linear prediction error and robust residual



(a) Linear prediction error and robust residual



(b) Estimated power spectrum



(b) Estimated power spectrum

그림 7 아웃라이어가 없을 때의 모의 뇌파신호의 전력밀도 스펙트럼 추정

Fig. 7 Power spectrum of simulated EEG signal when outliers does not exist

그림 9 아웃라이어가 섞여 있을 때의 모의 뇌파신호의 전력밀도 스펙트럼 추정

Fig. 9 Power spectrum of EEG signal when outliers exist

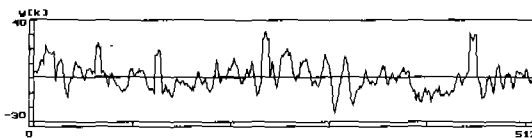


그림 8 아웃라이어가 섞여 있을 때의 모의 뇌파신호의 전력밀도  
Fig. 8 Simulated EEG signal contaminated by outliers

한 것이다.

이상적인 전력밀도 스펙트럼을 알고 있는 모의 신호를 이용한 실험을 통한 타당성을 근거로 실제의 뇌파신호에 적용하여 보았다. 실제의 뇌파신호는 뇌파기로부터 얻은 아날로그 뇌파신호를 200Hz 샘플링하여 얻었다.

그림 10는 아티팩트에 의하여 오염된 실제의 뇌파신호이며, 그림 11은 로버스트 필터링 알고리즘 의하여 실험한 결과이다.

표 1 통계적 파라미터

Table 1 List of statistical parameters

	ar. dat	oar. dat	seeg. dat	oseeg. dat
$\varphi_1$	-1.10072	-1.10913	-1.51595	-1.52775
$\varphi_2$	0.30178	0.27038	0.61074	0.61929
$\varphi_3$	-0.11955	-0.05559	0.10479	0.12238
$\varphi_4$	-0.14477	-0.20965	-0.17292	-0.19689
$\varphi_5$	0.12725	0.08022	0.21800	0.23094
$\varphi_6$	0.02040	0.03727	-0.06689	-0.08361
$\varphi_7$	-0.11050	-0.04295	-0.08110	-0.06156
$\varphi_8$	0.07284	0.09342	0.01246	0.01040
$\varphi_9$	-0.05086	-0.06041	0.11801	0.10581
$\varphi_{10}$	0.02235	0.01198	-0.02597	-0.01968
mean of original data	0.59462	-0.52845	0.55262	0.53993
mean of robustified data	0.59462	-0.53687	0.58093	0.55140
variance of original data	1.05138	1.13921	8.68335	8.64575
variance of robustified data	1.04718	1.06253	8.42152	8.40996

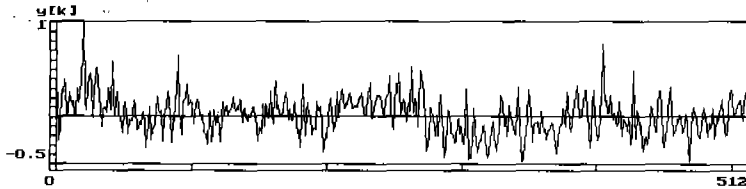


그림 10 아티팩트에 의하여 오염된 실제의 뇌파신호

Fig. 10 Real EEG signal contaminated by artifacts

5. 결 론

본 연구에서는 배경뇌파 신호의 전력밀도 스펙트럼을 추정할 때, 혼입된 아티팩트로 인한 왜곡현상을 줄이고 정확한 스펙트럼을 얻기 위하여 로버스트 필터링 알고리즘을 이용한 스펙트럼 추정방법을 사용하였다.

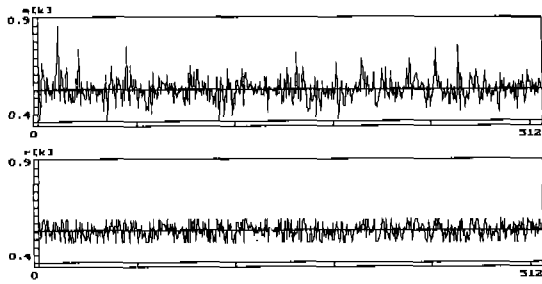
로버스트 필터를 실제 뇌파신호의 전력밀도 스펙트럼 추정에 적용하기에 앞서, 자기회귀 과정이나 모의 배경뇌파와 같은 이상적인 전력밀도 스펙트럼을 알고 있는 관측 데이터를 시험하여 그 타당성을 확인하여 보았다.

그 결과, 로버스트 필터링 알고리즘을 이용하여

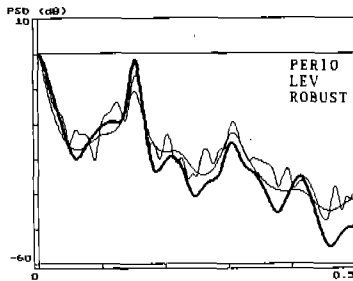
추정한 경우에는 아웃라이어의 존재에 따른 스펙트럼의 모양 변화가 거의 없었다. 그러나 기존의 평균 페리오도그램 추정방법이나 Levinson 알고리즘과 같은 AR 스펙트럼 추정 방법을 이용하였을 때는 아웃라이어의 존재 여부에 따라 스펙트럼의 모양에 많은 차이를 보였으며 전력밀도 스펙트럼에 상당한 왜곡현상이 발생하는 것을 볼 수 있었다. 따라서 아웃라이어가 섞인 관측 데이터의 스펙트럼 추정에 대한 로버스트 필터링 알고리즘의 타당성을 확인할 수 있었다.

얻어진 결과는 다음과 같다.

1. 아티팩트에 의하여 오염된 배경뇌파는 통계적 추정과정에서 아웃라이어가 존재하게 되어,



(a) Linear prediction error and robust residual



(b) Estimated power spectrum

그림 11 아티팩트에 의해 오염된 실제 뇌파신호의 전력밀도 스펙트럼 추정

Fig. 11 Power spectrum of EEG signal contaminated by artifacts

Maximum likelihood방법이나 Least square방법과 같은 기존의 선형적 추정방법에서 가정하였던 가우시안분포를 만족하지 않았다.

2. 아웃라이어가 존재하는 경우 평균 페리오그램 추정방법이나 Levinson 알고리즘과 같은 AR 모델에 의한 스펙트럼 추정 방법을 이용하였을 때 전력밀도 스펙트럼 상당한 왜곡현상이 발생한다.
3. 로버스트 필터를 이용한 스펙트럼 추정방법은

Maximum likelihood방법이나 Least square방법과 달리 아웃라이어의 존재여부에 영향을 거의 받지 않고 정확한 스펙트럼을 추정할 수 있다.

4. 로버스트 필터를 이용한 스펙트럼 추정방법은 여러가지 아티팩트에 의하여 오염되기 쉬운 배경뇌파 신호는 물론이고 그 밖의 여러 생체 신호의 견실한 스펙트럼을 추정하는에 적합하다.

## 참 고 문 헌

- 1) F. R. Hampel, "A General Qualitative Definition of Robustness," *Annals. Math. Statist.*, 35, pp.73~101, 1971
- 2) P. J. Huber, "Robust Estimation of a Location Parameter," *Annals. Math. Statist.*, 1964
- 3) P. J. Huber : *Robust Statistics*, 1981
- 4) F. R. Hampel, E. M. Ronchetti, P. J. Rousseuw, W. A. Stahel : *Robust Statistics*, 1986
- 5) Fox A. J., "Outliers in Time Series," *J. R. Statist. Soc., Ser. B.* 34. PP.350~363, 1972
- 6) B. Kleiner, R. D. Martin, D. J. Thomson, "Robust Estimation of Power Spectra," *J. R. Statist. Soc. B*, 41, No. 3, pp.313~351
- 7) R. Coopee, J. W. Osselton, J. C. Shaw : *EEG Technology*, Butterworths, 1980
- 8) R. Spehlmann : *EEG Primer*, 1981
- 9) F. R. Hampel, "The Influence Curve and Its Role in Robust Estimation," *Journal of the American Statistical Association*, Vol.69, Num.346, pp.383~393, Jun. 1974
- 10) L. H. Zetterberg, Kjeli Ahlin, "Analogue simulator of e.e.g. signals based on spectral components," *Medical and Biomedical Engineering*, pp.272~278, Mar. 1975