



저작자표시 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.
- 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#) 

누적로짓 모형에서
비례오즈 가정 검토 방법 비교



연세대학교 대학원
의학전산통계학협동과정
의학통계학전공

최 효 진

누적로짓 모형에서
비례오즈 가정 검토 방법 비교

지도 정 인 경 교수

이 논문을 석사 학위논문으로 제출함



2015년 06월 일

연세대학교 대학원
의학전산통계학협동과정
의학통계학전공
최 효 진

최효진의 석사 학위논문을 인준함

심사위원 정 인 경 인

심사위원 송 기 준 인

심사위원 남 정 모 인



연세대학교 대학원

2015년 06월 일

차 례

표 차례	iii
그림 차례	iv
국문 요약	v
제 1장 서론	1
1.1 연구 배경 및 목적	1
1.2 연구 내용 및 방법	2
1.3 논문의 구성	2
제 2장 이론적 배경	3
2.1 누적로짓 모형	3
2.2 비례오즈 가정 검정	5
2.2.1 스코어 검정	5
2.2.2 우도비 검정	7
2.2.3 왈드 검정	8
2.2.4 Pulkstenis와 Robinson의 방법	8
2.2.5 Graphical 방법	10
제 3장 모의실험	12
3.1 모의실험 설계	12
3.2 모의실험 결과	15

제 4장 실제자료 분석	37
4.1 자료 설명	37
4.2 분석 결과	38
제 5장 결론 및 고찰	41
참고문헌	43
영문 요약	44



표 차 례

표 1. χ^{*2} 과 D^{*2} 검정 방법에서 관측 빈도수의 자료구조.....	10
표 2. 누적로짓 함수의 회귀계수.....	14
표 3. 모형 1에서 $\theta = 0$ 일 때, 종속변수 범주가 3개인 경우 제 1종 오류율....	17
표 4. 모형 1에서 $\theta = 0.2$ 일 때, 종속변수 범주가 3개인 경우 검정력.....	18
표 5. 모형 2에서 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 일 때, 종속변수 범주가 3개인 경우 제 1종 오류 율	19
표 6. 모형 2에서 $\theta_1 = \theta_2 = 0.2$ 일 때, 종속변수 범주가 3개인 경우 검정력.....	20
표 7. 모형 2에서 $\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0$ 일 때, 종속변수 범주가 3개인 경우 검정력.....	21
표 8. 모형 2에서 $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0.2$ 일 때, 종속변수 범주가 3개인 경우 검정력.....	22
표 9. 모형 3에서 $\theta = 0$ 일 때, 종속변수 범주가 4개인 경우 제 1종 오류율....	23
표 10. 모형 3에서 $\theta = 0.2$ 일 때, 종속변수 범주가 4개인 경우 검정력.....	24
표 11. 모형 4에서 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 일 때, 종속변수 범주가 4개인 경우 제 1종 오류 율.....	25
표 12. 모형 4에서 $\theta_1 = \theta_2 = 0.2$ 일 때, 종속변수 범주가 4개인 경우 검정력....	26
표 13. 모형 4에서 $\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0$ 일 때, 종속변수 범주가 4개인 경우 검정력	27
표 14. 모형 4에서 $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0.2$ 일 때, 종속변수 범주가 4개인 경우 검정력	28
표 15. 녹내장 자료 변수 설명.....	38
표 16. 녹내장 자료 기술통계량.....	38
표 17. 녹내장 자료의 누적로짓 회귀모형.....	39

표 18. 녹내장 자료에서 비레오즈 가정 검정..... 39

그 립 차 례

그림 1. 표 6의 $x \sim U(0,10)$ 경우 각각의 모의실험에서 선택된 하나의 자료에 대한 plot과 reference plot..... 29

그림 2. 표 6의 $x \sim N(5,3)$ 경우 각각의 모의실험에서 선택된 하나의 자료에 대한 plot과 reference plot..... 30

그림 3. 표 7의 $x \sim U(0,10)$ 경우 각각의 모의실험에서 선택된 하나의 자료에 대한 plot과 reference plot..... 31

그림 4. 표 7의 $x \sim N(5,3)$ 경우 각각의 모의실험에서 선택된 하나의 자료에 대한 plot과 reference plot..... 32

그림 5. 표 12의 $x \sim U(0,10)$ 경우 각각의 모의실험에서 선택된 하나의 자료에 대한 plot과 reference plot..... 33

그림 6. 표 12의 $x \sim N(5,3)$ 경우 각각의 모의실험에서 선택된 하나의 자료에 대한 plot과 reference plot..... 34

그림 7. 표 15의 $x \sim U(0,10)$ 경우 각각의 모의실험에서 선택된 하나의 자료에 대한 plot과 reference plot..... 35

그림 8. 표 15의 $x \sim N(5,3)$ 경우 각각의 모의실험에서 선택된 하나의 자료에 대한 plot과 reference plot..... 36

그림 9. 녹내장 자료에 대한 graphical 방법 결과..... 40

국 문 요 약

누적로짓 모형에서 비례오즈 가정 검토 방법 비교

많은 연구에서 얻어지는 자료 중 종속변수가 범주형이고 연속형 또는 범주형 독립변수들의 관계를 보기 위해 가장 빈번하게 사용되는 방법은 일반화선형모형을 통한 분석이다. 의학 분야에서 특히, 질병의 악화, 호전, 완치 등과 같이 범주가 3개 이상인 순서를 가진 다항종속변수를 모형화하기 위해서는 순서를 고려한 로짓을 이용해 누적로짓 모형을 사용한다. 누적로짓 모형은 종속변수 각 범주의 누적확률에 대해 독립변수들의 효과가 동일하다는 성질로 인해 비례오즈 모형이라고 부른다. 이러한 누적로짓 모형을 적용하기 위해서는 반드시 비례오즈 가정이 만족함을 보여야 한다. 이를 검토하는 방법으로는 스코어 검정, 우도비 검정, 왈드 검정, Pulkstenis와 Robinson (2004)가 제안한 확장된 Pearson chi-square와 deviance 검정 그리고 graphical 방법이 있다. 이 방법들을 소개하고 모의실험을 통해 제 1종 오류율을 확인하고 비례오즈 가정이 성립하지 않는 상황을 제시해 검정력을 비교하였다. 또한 graphical 방법으로 각 상황에서 실질적 유의성을 판단하였다.

모의실험 결과 제 1종 오류율은 χ^{*2} , D^{*2} 검정 방법의 경우 조금 더 유의수준과 비슷한 값을 갖으나 다섯 가지 방법 모두 비슷하였다. 검정력의 경우 스코어, 왈드, 우도비 검정 방법의 경우 좀 더 높은 검정력을 갖고, 모든 방법이 표본의 크기가 커질수록 더 높은 검정력을 가졌다. 그러나 범주형 독립변수가 비례오즈 가정을 만족하지 않을 때인 경우 검정력이 매우 낮게 나오는 것을 확인 할 수 있었다. 그래서 이 경우에 graphical 방법으로 실질적 유의성을 평가하였다. 비례오즈 가정을 만족하지 않는 상황에서 다섯가지 통계량 모두 비례오즈 가정을 만족한다는 결론을 내렸지만 graphical 방법으로 plot과

reference plot을 비교하였을 때 두 plot이 약간의 차이를 보여 비레오즈 가정을 만족한다고 보기 어려웠다.

이를 통해 χ^2 , D^{*2} 검정 방법은 다른 검정방법에 비해 검정력이 낮아 비레오즈 가정 검정에 사용할 경우 주의가 필요하다. 따라서 스코어, 왈드, 우도비 검정방법 모두 확인 해보는 것이 좋으며, graphical 방법을 사용할 경우 주관적인 판단을 할 가능성이 있으므로 신중한 판단이 필요하지만(Kim, 2004), 보충자료로써 추가로 제시되어 더 정확한 판단과 분석을 하는데 도움을 줄 것이라고 여겨진다.



핵심되는 말 : 순서형 종속변수, 누적확률, 누적로짓 모형, 비레오즈

제 1장 서론

1.1 연구 배경 및 목적

많은 연구에서 얻어지는 자료 중 종속변수가 범주형이고 연속형 또는 범주형 독립변수들의 관계를 보기 위해 사용되는 분석방법은 여러 가지가 있지만, 가장 빈번하게 사용되는 방법은 일반화선형모형을 통한 분석이다. 의학 분야에서는 질병의 발생여부와 같이 범주가 2개인 이항종속변수를 모형화 할 경우 로지스틱 회귀모형을 사용하고, 범주가 3개 이상인 다항종속변수를 모형화 할 경우 다범주 로짓 모형을 사용한다. 특히, 질병의 악화, 호전, 완치 등과 같이 범주가 3개 이상인 순서를 가진 다항종속변수를 모형화하기 위해서는 순서를 고려한 로짓을 이용해 누적로짓 모형을 사용한다. 이러한 누적로짓 모형은 종속변수 각 범주의 누적확률에 대해 독립변수들의 효과가 동일하다는 성질로 인하여 비례오즈 모형이라고 부른다. 누적로짓 모형을 적용하기 위해서는 반드시 각 범주의 누적확률에 대한 독립변수들의 효과가 같다는 비례오즈 가정이 만족함을 보여야 한다(Agresti, 2010, 53-75).

본 연구에서는 누적로짓 모형의 비례오즈 가정을 만족하는지 평가하기 위한 방법들을 소개한다. 이러한 방법들을 모의실험을 통하여 종속변수의 범주 수, 독립변수의 개수 그리고 표본 크기를 다르게 하여 제 1종 오류율(type I error rates)을 확인하고, 비례오즈 가정이 성립하지 않는 여러 가지 상황과 각 상황에 대한 표본크기를 다르게 제시하여 검정력(power)을 비교하고 평가한다. 또한 비례오즈 가정 검토에 대한 방법을 실제 자료에 적용하여 결과를 비교하고자 한다.

1.2 연구 내용 및 방법

본 연구에서는 누적로짓 모형에서 비례 오즈 가정을 만족하여 모형의 적합함을 확인하기 위해 가장 흔히 사용하고 있는 스코어 통계량(Peterson과 Harrell, 1990), 우도비 통계량, 왈드 통계량을 이용한 검정 방법, Pulkstenis와 Robinson (2004)가 제안한 순서형 다항 종속변수인 경우 사용되는 방법으로 기존의 Pearson chi-square와 deviance 검정에서 확장된 방법들을 소개한다. 또한 그림으로 비례오즈 가정 검정을 검토하는 graphical 방법도 소개한다. 이때 모의실험을 통해 종속변수의 범주 수와 독립변수의 개수를 다르게 하여 다섯 가지 방법의 제 1종 오류율을 확인하고 또한, 비례오즈 가정이 성립하지 않는 상황을 제시하여 이를 얼마나 잘 판별하는지에 대한 검정력을 알아보고 비교하고자 한다. 또한 다섯 가지의 방법을 순서형 종속변수를 가지는 자료에 적용시켜 결과를 비교하고자 한다.

1.3 논문의 구성

제 1장에서는 연구의 배경 및 목적과 연구 내용 및 방법을 소개한다. 제 2장에서는 본 연구의 이론적 배경이 되는 누적로짓 모형을 살펴보고 비례오즈 가정을 검토하기 위한 다섯 가지 방법에 대한 이론적 배경 및 통계량에 대한 식과 graphical 방법을 소개한다. 제 3장에서는 모의실험을 통해 2장에서 소개한 다섯 가지 방법들의 비교, 평가한다. 제 4장에서는 비례오즈 가정 검토에 대한 방법을 실제 자료에 적용하여 결과를 비교한다. 마지막으로 제 5장에서는 결론 및 고찰을 제시한다.

제 2장 이론적 배경

2.1 누적로짓 모형

로지스틱 회귀모형은 이항종속변수를 모형화 하는데 많이 사용되고 있다. 이러한 로지스틱 회귀모형에서 이항종속변수가 아닌 3개 이상의 다항종속변수일 경우에는 다범주 로짓 모형이라 하며, 특히 다항종속변수가 순서형인 경우에 사용되는 방법을 누적로짓 모형이라고 한다. 이 모형은 다른 다범주 로짓 모형보다 해석하기가 더 간단하고 더 좋은 검정력을 갖는다(Agresti, 2007, 180-189).

종속변수 Y 는 1에서 c 까지 가능한 c 개의 범주를 가지는 순서형 종속변수이고, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_p)'$ 는 p 개의 독립적인 설명변수가 있다고 하자. 이때 비례오차를 갖는 누적로짓 모형은 종속변수의 범주 j 또는 그 이하 범주에 속하게 될 확률과 종속변수의 범주 j 보다 더 큰 범주에 속할 확률을 비교한다. 이에 대한 누적로짓 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} g_j(\mathbf{x}) &= \ln \left[\frac{P(Y \leq j | \mathbf{x})}{P(Y > j | \mathbf{x})} \right] = \text{logit}[P(Y \leq j | \mathbf{x})] \\ &= \alpha_j + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p, \quad j=1, 2, \dots, c-1 \end{aligned} \quad (1)$$

식 (1)에서 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)'$ 는 회귀계수를 나타내며 각 범주의 누적로짓마다 같은 값을 나타낸다. 반면에 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{c-1}$ 는 절편을 나타내며 각 범주의 누적로짓마다 다른 값을 갖는다. 즉, 순서형 종속변수에 대한 누적로짓 모형은 종속변수의 범주들을 이진형의 형태로 결합시켜 만든 $c-1$ 개의 로짓에 대해서 \mathbf{x} 의 효과가 동일하다고 가정한다. 이러한 누적로짓 함수를 이

용하여 조건부 \mathbf{x} 에 대한 종속변수의 범주 j 또는 그 이하 범주에 속하게 될 누적확률은 다음과 같이 정의하고

$$P(Y \leq j | \mathbf{x}) = \frac{e^{g_j(\mathbf{x})}}{1 + e^{g_j(\mathbf{x})}}, \quad j = 1, 2, \dots, c-1$$

$P(Y \leq 1) \leq P(Y \leq 2) \leq \dots \leq P(Y \leq c) = 1$ 로 순서를 반영한다. 마지막 확률인 $P(Y \leq c)$ 는 당연히 1이 되므로 사용하지 않는다.

조건부 \mathbf{x} 에 대한 j 번째 종속변수의 범주에 속할 확률 $\pi_j = P(Y = j | \mathbf{x})$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \pi_1 &= P(Y \leq 1 | \mathbf{x}), \\ \pi_2 &= P(Y \leq 2 | \mathbf{x}) - P(Y \leq 1 | \mathbf{x}), \\ \pi_3 &= P(Y \leq 3 | \mathbf{x}) - P(Y \leq 2 | \mathbf{x}), \\ &\vdots \\ \pi_c &= 1 - P(Y \leq c-1 | \mathbf{x}). \end{aligned}$$

이를 표본의 크기가 n 개인 것에 대해 고려해보면, 위에서 언급했던 표기를 (\mathbf{x}_i, y_{ij}) 과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 y_{ij} 는 y_i 가 j 번째 범주에 속할 경우 1의 값을 가지고, 그렇지 않은 경우 0의 값을 갖는다($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, c$). 누적로짓 모형의 적합값과 $\boldsymbol{\alpha}$ 와 $\boldsymbol{\beta}$ 의 추정값은 표준최대우도추정법(standard maximum likelihood methods)로부터 계산된다. 본 연구에서는 누적로짓 모형을 적합한 후에 얻게 되는 추정값 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 을 이용하여 각 개체가 j 번째 종속변수의 범주에 속할 예측 확률을 계산하고 이를 $\hat{\boldsymbol{\pi}}_{ij} = (\hat{\pi}_{i1}, \hat{\pi}_{i2}, \dots, \hat{\pi}_{ic})$, $i = 1, 2, \dots, n$ 으로 나타낸다.

2.2 비례오즈 가정 검정

누적로짓 모형을 적용하기 위해서는 반드시 각 범주의 누적확률에 대한 독립변수들의 효과가 같다는 비례오즈 가정이 만족함을 보여야 한다. 이러한 비례오즈 가정에 대한 검정방법들은 다음의 가설에 대해 검정한다.

H_0 : 비례오즈 가정을 만족한다.

H_1 : 비례오즈 가정을 만족하지 않는다.

이 장에서는 비례오즈 가정을 검정하기 위해 최대우도함수(maximum likelihood function)를 이용한 방법인 스코어 검정, 우도비 검정, 왈드 검정 방법들, 실제 관측 빈도수와 기대 빈도수를 이용해 모형 적합도 검정을 하는 확장된 chi-square와 deviance 검정을 이용해 비례오즈 가정을 검정하는 방법과 그림으로 실제적 유의성을 평가하는 graphical 방법을 소개한다.

2.2.1 스코어 검정

누적로짓 모형을 적용하기 위해서는 반드시 각 범주의 누적확률에 대한 독립변수들의 효과가 같다는 가정이 만족함을 보이는 것으로 비례오즈 가정을 만족하는 식 (1)과 만족하지 않는 더 복잡한 모형인

$$\begin{aligned} g_j(\mathbf{x}) &= \ln \left[\frac{P(Y \leq j | \mathbf{x})}{P(Y > j | \mathbf{x})} \right] = \text{logit}[P(Y \leq j | \mathbf{x})] \\ &= \alpha_j + \beta_{j1}x_1 + \beta_{j2}x_2 + \cdots + \beta_{jp}x_p, \quad j=1, 2, \dots, c-1 \end{aligned} \quad (2)$$

을 비교하는 방법이다.

스코어 검정은 Peterson과 Harrell (1990)의 스코어 통계량을 사용하여 비례오즈 가정을 만족하는지 확인한다. 이 방법은 비례오즈 가정을 만족하는 귀무가설 하에서 로그 우도의 변화율을 평가하는 방법이다. 귀무가설 하에서 식 (1)의 최대우도 추정값이 $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_p)'$ 일 때, 검정통계량은 다음과 같다.

$$S = U'(\hat{\beta}) I(\hat{\beta})^{-1} U(\hat{\beta})$$

이때, $U(\hat{\beta})$ 는 로그우도함수를 한 번 편미분을 해서 구한 값이고, I 는 정보행렬(information matrix)이다. 우도함수, $U(\hat{\beta})$ 와 I 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L(\beta | \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n \left[\prod_{j=1}^c \pi_j(\mathbf{x})^{y_{ij}} \right] = \prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{j=1}^c [P(Y_i \leq j | \mathbf{x}_i) - P(Y_i \leq j-1 | \mathbf{x}_i)]^{y_{ij}} \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{j=1}^c \left[\frac{\exp(\alpha_j + \beta' \mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\alpha_j + \beta' \mathbf{x}_i)} - \frac{\exp(\alpha_{j-1} + \beta' \mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\alpha_{j-1} + \beta' \mathbf{x}_i)} \right]^{y_{ij}} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

$$l(\beta | \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^c y_{ij} \log \left(\frac{\exp(\alpha_j + \beta' \mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\alpha_j + \beta' \mathbf{x}_i)} - \frac{\exp(\alpha_{j-1} + \beta' \mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\alpha_{j-1} + \beta' \mathbf{x}_i)} \right).$$

$$U(\hat{\beta}) = \frac{\partial \log L(\hat{\beta} | \mathbf{x})}{\partial \beta}$$

$$I(\hat{\beta}) = -E \left(\frac{\partial^2 \log L(\hat{\beta} | \mathbf{x})}{\partial \beta \partial \beta'} \right)$$

그리고 $L(\hat{\beta} | \mathbf{x})$ 는 식 (2)의 우도함수를 나타낸다. 스코어 통계량은 자유도가 $p(c-2)$ 인 카이제곱분포를 따르게 된다.

2.2.2 우도비 검정

우도비 검정통계량도 2.2.1에서 제시한 스코어 검정과 마찬가지로 비례오즈 가정을 만족하는 식 (1) 만족하지 않는 복잡한 식 (2)을 비교한다. 즉 두 개의 우도비 함수의 최댓값의 비를 사용하는 방법이다. 첫 번째는 귀무가설 하에서 가능한 모수 값들에 대한 최댓값이고, 두 번째는 귀무가설이나 대립가설 중 어느 것이 참이냐와 상관없이 가능한 모든 모수 값에 대하여 최댓값을 취하는 것이다. 귀무가설 하에서의 우도함수는 식 (3)이고, 대립가설 하에서의 우도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 L(\boldsymbol{\beta}_j | \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n \left[\prod_{j=1}^c \pi_j(\mathbf{x})^{y_{ij}} \right] = \prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{j=1}^c [P(Y_i \leq j | \mathbf{x}_i) - P(Y_i \leq j-1 | \mathbf{x}_i)]^{y_{ij}} \right\} \\
 &= \prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{j=1}^c \left[\frac{\exp(\alpha_j + \boldsymbol{\beta}_j' \mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\alpha_j + \boldsymbol{\beta}_j' \mathbf{x}_i)} - \frac{\exp(\alpha_{j-1} + \boldsymbol{\beta}_{j-1}' \mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\alpha_{j-1} + \boldsymbol{\beta}_{j-1}' \mathbf{x}_i)} \right]^{y_{ij}} \right\} \\
 l(\boldsymbol{\beta}_j | \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^c y_{ij} \log \left(\frac{\exp(\alpha_j + \boldsymbol{\beta}_j' \mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\alpha_j + \boldsymbol{\beta}_j' \mathbf{x}_i)} - \frac{\exp(\alpha_{j-1} + \boldsymbol{\beta}_{j-1}' \mathbf{x}_i)}{1 + \exp(\alpha_{j-1} + \boldsymbol{\beta}_{j-1}' \mathbf{x}_i)} \right).
 \end{aligned}$$

l_0 를 귀무가설 하에서 구한 우도함수의 최댓값이라고 하고 l_1 을 귀무가설과 대립가설 중 어느 것이 참이냐와 상관없이 모든 모수 값에 대하여 구한 가능도 함수의 최댓값이라고 하자. l_1 은 더 큰 가능한 모수들의 집단에 대해 최대화시킨 값이므로 l_0 보다 항상 크거나 같은 값을 가지게 된다. 대립가설 하에서의 우도함수와 우도비 검정통계량은 다음과 같다.

$$-2\ln(l_0/l_1)$$

이 통계량은 자유도가 $p(c-2)$ 인 카이제곱 분포를 따르게 된다.

2.2.3 왈드 검정

왈드 통계량은 비례오즈 가정을 만족하지 않는 복잡한 식 (2)을 이용하여 검정하는 방법이다. 대립가설 하에서 최대우도 추정값을 구하고, 표준오차에 대한 식에 미지의 모수에 대한 최대우도 추정값을 대입해서 구한 최대우도 추정량의 표준편차를 이용하여 검정통계량을 나타낸다.

대립가설 하에서 식 (2)에 대한 최대우도 추정값은 $\tilde{\beta}_j = (\tilde{\beta}_{j1}, \tilde{\beta}_{j2}, \dots, \tilde{\beta}_{jp})'$, $j=1, \dots, c-1$, $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}'_1, \tilde{\beta}'_2, \dots, \tilde{\beta}'_{c-1})'$ 이고, 이에 대한 검정통계량은 다음과 같다.

$$X^2 = (D\tilde{\beta})' [D\hat{V}(\tilde{\beta})D']^{-1} (D\tilde{\beta}),$$

이때, D 는 $(c-2)p \times (c-1)p$ contrast 행렬을 나타내고 $\hat{V}(\tilde{\beta})$ 는 $\tilde{\beta}$ 에 대한 $(c-1)p \times (c-1)p$ 공분산 행렬을 나타낸다.

$$D = \begin{bmatrix} I_{p \times p} & -I_{p \times p} & 0 & \dots & 0 \\ I_{p \times p} & 0 & -I_{p \times p} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{p \times p} & 0 & 0 & \dots & -I_{p \times p} \end{bmatrix}$$

이 통계량은 자유도가 $p(c-2)$ 인 카이제곱 분포를 따르게 된다.

2.2.4 Pulkstenis와 Robinson의 방법

이 방법은 앞서 설명한 스코어, 왈드, 우도비 검정과는 다르게 모형의 적합

도 검정을 이용하여 비례오즈 가정을 검정하는 방법이다. 일반적으로 누적로짓 모형을 적합할 때 공변량은 범주형 변수만 포함시키는 것이 아니라 연속형 변수도 포함한다. 그런데 Pearson chi-square와 deviance 검정 방법은 연속형 공변량이 존재할 경우 카이제곱분포를 잘 따르지 않는 경향이 있기 때문에 Pulkstenis와 Robinson (2004)은 기존의 방법을 확장한 모형의 적합도 검정 방법을 제안했다.

이 방법은 Pulkstenis와 Robinson (2004)이 이항종속변수를 가진 로지스틱 회귀모형일 때 사용할 수 있는 통계량을 일반화 시킨 방법으로 각각 공변량 패턴의 관측도수에 대한 순서형 점수(ordinal score)를 할당하고 이 순서형 점수를 이용하여 각 공변량 패턴을 두 수준의 하위그룹으로 나누는 것을 제안하였다. 순서형 점수는 Lipsitz (1996)의 방법과 유사하게 정의된다.

$$score_i = \hat{\pi}_{i1} + 2\hat{\pi}_{i2} + \dots + c\hat{\pi}_{ic}, \quad i = 1, \dots, n$$

우선, 모형에 포함되어 있는 범주형 독립변수에 수준에 따라 공변량 패턴을 결정한다. 그리고 각 공변량 패턴의 범위 안에서 할당된 순서형 점수의 중앙값을 계산하여 중앙값보다 작으면 첫 번째 하위그룹에 포함하고 중앙값보다 크면 두 번째 하위그룹에 포함시킨다. 연속형 독립변수가 모형에 포함될 경우 같은 순서형 점수를 갖는 일은 매우 드물다. 그렇지만 만약 존재하게 된다면 첫 번째 하위그룹에 포함시킨다. 이 방법을 가지고 분류표를 만들게 되면 표 1과 같이 만들어 지며 이 표 1을 이용하여 확장된 Pearson chi-square와 deviance 통계량을 얻을 수 있다.

$$\chi^{*2} = \sum_{i=1}^I \sum_{h=1}^2 \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ihj} - E_{ihj})^2}{E_{ihj}}$$

$$D^{*2} = 2 \sum_{i=1}^I \sum_{h=2}^2 \sum_{j=1}^c O_{ihj} \log \frac{O_{ihj}}{E_{ihj}}$$

이때, i 는 공변량 패턴, h 는 하위그룹을 나타내고, j 는 순서형 종속변수의 범주를 나타낸다. 위의 두 개의 통계량들은 $(2I-1)*(c-1)-k-1$ 인 카이제곱 분포를 따른다. 여기서 I 는 표 1에서 행의 수를 나타내고, k 는 모형에서 범주형 항을 나타낸다. 또한 연속형 독립변수가 존재하기 때문에 1을 빼준다.

표 1. χ^{*2} 과 D^{*2} 검정 방법에서 관측 빈도수의 자료구조

공변량 패턴	하위그룹	종속변수				
		$Y=1$	$Y=2$	\dots	$Y=c$	
\mathbf{x}_1	1	O_{111}	O_{112}	\dots	O_{11c}	n_{11}
\mathbf{x}_1	2	O_{121}	O_{122}	\dots	O_{12c}	n_{12}
\mathbf{x}_2	1	O_{211}	O_{212}	\dots	O_{21c}	n_{21}
\mathbf{x}_2	2	O_{221}	O_{222}	\dots	O_{22c}	n_{22}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\mathbf{x}_I	1	O_{I11}	O_{I12}	\dots	O_{I1c}	n_{I1}
\mathbf{x}_I	2	O_{I21}	O_{I22}	\dots	O_{I2c}	n_{I2}

2.2.5 Graphical 방법

Graphical 방법은 Kim (2004)이 제안한 방법으로 비례오즈 가정의 실제적 유의성을 평가하기 위하여 제안된 방법이다. 이 방법은 누적로짓 모형인 식 (1)와 비례오즈 가정을 만족하지 않는 식 (2)을 이용하여 plot과 reference plot을 그리고 이 두 개의 그림을 비교하는 방법이다.

먼저 plot을 그리는 방법을 설명하면, 관찰된 data (\mathbf{x}_i, y_{ij}) 를 가지고 누적로짓 모형인 식 (1)를 적합한 후 $\hat{p}_{1i} = \hat{P}(Y_i = y_i | \mathbf{x})$ 과 비례오즈 가정을 만족하지 않는 복잡한 모형인 식 (2)을 적합한 후 $\hat{p}_{2i} = \hat{P}(Y_i = y_i | \mathbf{x})$ 를 이용하여 plot을 그린다. 이 plot은 “ H_0 : 비례오즈 가정을 만족한다.”라는 귀무가설 하에서 기울기가 1에 가까운 plot이 그려지게 된다.

다음으로 누적로짓 모형에서 범주 j 에 속할 확률 $\hat{\pi}_{ij}$ 을 이용한 다항분포로부터 새로운 data를 생성한다. 이 data (\mathbf{x}_i, y_{ij}^*) 를 가지고 누적로짓 모형을 다시 적합하고 그 때의 $\hat{p}_{1i}^* = \hat{P}(Y_i^* = y_i^* | \mathbf{x})$ 과 비례오즈 가정을 만족하지 않는 모형을 적합한 후 $\hat{p}_{2i}^* = \hat{P}(Y_i^* = y_i^* | \mathbf{x})$ 를 이용하여 reference plot을 그린다. reference plot의 기울기는 비례오즈 가정을 만족하는지 안하는지 상관없이 거의 항상 1에 근접한다.

위에서 그린 plot과 reference plot을 비교하여 두 개의 그림이 비슷한 선형성을 보이는지 비교하여 비례오즈 가정을 만족하는지 아닌지를 판단한다.

Graphical 방법은 실제적 유의성을 평가하는 것으로 일반적인 통계적 유의성과 구분된다. 통계적 유의성은 가설 검정을 위해 설정한 유의수준에 따른 유의성을 말하고, 실제적 유의성은 통계적 유의성과 더불어 연구자가 반드시 고려해야 할 개념으로 연구의 가설검정 결과가 통계적인 유의성을 가졌더라도 실질적으로 그에 따른 결과가 어느 정도의 효과를 가지는지 판단하는 것을 말한다. 즉, 통계적 유의성과는 다르게 실제적 상황에서 연구자가 얻은 추정치를 유의한 것으로 볼 것인지 아닌지에 대해 연구자가 판단해야 하는 것으로 “옳다, 그르다”로 판단하는 것이 아닌 연구자의 사려 깊은 판단에 의해 결정되어야 하는 것으로 주관적인 판단을 할 가능성이 있다(Kim, 2004).

제 3장 모의실험

이 장에서는 제 2장에서 소개한 여섯 가지 방법을 이용해 비례오즈 가정을 만족하는 상황에서 제 1종 오류율(type I error rates)과 비례오즈 가정을 만족하지 않은 상황에서 검정력(power)을 알아보기 위해 모의실험을 수행하였다.

3.1 모의실험 설계

모의실험의 자료를 얻기 위해 네 가지 모형을 제시하는데, 이모형들은 누적로짓 함수를 이용한다. 우선 연속형 독립변수가 1개이고 종속변수 범주가 3개인 경우 누적로짓 함수는 다음과 같고,

$$\begin{aligned}g_1(x) &= \alpha_1 + \beta_1 x \\g_2(x) &= \alpha_2 + (\beta_1 + \theta)x\end{aligned}$$

종속변수 범주가 4개인 경우는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}g_1(x) &= \alpha_1 + \beta_1 x \\g_2(x) &= \alpha_2 + (\beta_1 + \theta)x \\g_3(x) &= \alpha_3 + (\beta_1 + \theta)x\end{aligned}$$

다음으로 연속형 독립변수가 1개, 범주형 독립변수가 1개 총 두 개의 독립변수를 가지면서 종속변수 범주가 3개인 경우 누적로짓 함수는 다음과 같고,

$$g_1(x) = \alpha_1 + \beta_1 x + \beta_2 d$$

$$g_2(x) = \alpha_2 + (\beta_1 + \theta_1)x + (\beta_2 + \theta_2)d$$

종속변수 범주가 4개인 경우는 다음과 같다.

$$g_1(x) = \alpha_1 + \beta_1 x + \beta_2 d$$

$$g_2(x) = \alpha_2 + (\beta_1 + \theta_1)x + (\beta_2 + \theta_2)d$$

$$g_3(x) = \alpha_3 + (\beta_1 + \theta_1)x + (\beta_2 + \theta_2)d$$

이때 누적로짓 함수에서 미리 설정해 놓은 회귀계수는 표 2와 같다. 연속형 독립변수인 경우 두 개의 분포를 사용하였다. 첫 번째 분포는 범위가 0에서 10인 균등분포이고, 두 번째 분포는 평균이 5이고 분산이 3인 정규분포이다. 그리고 두 번째 모형에서 사용된 범주형 독립변수의 경우 성공확률이 0.5인 베르누이분포를 이용해 생성하였다. 종속변수의 값을 결정하는 방법은 독립변수들과 모형에서 미리 설정해 놓은 회귀계수들을 이용하여 누적로짓 예측확률을 구하고, 범위가 0에서 1인 균등분포에서 임의의 값 u 를 생성하여 누적로짓 예측확률과 u 의 값을 비교하는 것이다. 즉 범주가 3개 이면 다음과 같이 정의하고

$$u \leq \pi_1, \quad y = 1$$

$$\pi_1 < u \leq \pi_1 + \pi_2, \quad y = 2$$

$$\pi_1 + \pi_2 < u, \quad y = 3$$

범주가 4개 이면 다음과 같이 정의하여

$$u \leq \pi_1, \quad y = 1$$

$$\begin{aligned} \pi_1 < u \leq \pi_1 + \pi_2, & \quad y = 2 \\ \pi_1 + \pi_2 < u \leq \pi_1 + \pi_2 + \pi_3, & \quad y = 3 \\ u > \pi_1 + \pi_2 + \pi_3, & \quad y = 4 \end{aligned}$$

이 식을 통해서 종속변수의 값을 구한다.

모형 1과 모형 3에서 $\theta = 0$ 이고, 모형 2와 모형 4에서 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 이면 비례오즈 가정을 만족하는 누적로짓 모형이 적합 된다. 이때 다섯 가지의 방법을 이용한 분석을 1000번 반복해 유의수준 1%, 5%, 그리고 10%에서 비례오즈가 만족하는 모형임에도 적절하지 않다고 잘못 판단할 횟수에 대한 분율을 계산하여 제 1종 오류율(type I error rates)을 확인하였다.

그리고 모형 1와 모형 3에서 $\theta = 0.2$ 이고 모형 2와 모형 4에서 $\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0.2, \theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.2$ 으로 인위적으로 비례오즈 가정을 만족하지 않는 상황에서 다섯 가지의 방법들이 이를 얼마나 잘 판단하는지 알아보고자 한다. 1000번의 반복을 통해 얻어진 통계량 값들 중 유의수준 1%, 5%, 그리고 10%에서 모형이 적합하지 않다고 결론을 내린 횟수에 대한 분율을 계산하여 검정력(power)을 확인하였다. 또한, 1000번 반복한 것 중 하나의 data set을 선택하여 graphical 방법으로 비례오즈 가정의 실제적 유의성을 평가하였다.

각 상황에 대한 표본의 크기는 100, 200, 400, 그리고 800으로 하였다.

표 2. 누적로짓 함수의 회귀계수

모형	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2
1	0.5	2.0	-	-0.25	-
2	0.5	2.0	-	-0.25	0.5
3	0.0	1.0	2.0	-0.2	-
4	0.0	1.0	2.0	-0.2	0.5

3.2 모의실험 결과

종속변수의 범주가 3개이고 독립변수를 연속형 변수 1개만 고려했을 때의 제 1종 오류율에 대한 모의실험 결과는 표 3에 나타나 있다. 표 3를 확인해보면 제 1종 오류율은 다섯 가지 검정방법에서 거의 비슷한 결과를 보이나 연속형 변수가 균등분포를 따를 때 χ^2 와 D^2 검정 방법의 값이 유의수준에 조금 더 가까운 값을 갖는다는 것을 확인 할 수 있었다. 표 4의 결과로 검정력의 경우 스코어, 왈드, 우도비 검정 일 때 좀 더 높은 검정력을 가지는 것을 알 수 있었고 특히 연속형 변수가 균등분포를 따르는 경우에는 스코어 검정이, 정규분포를 따르는 경우에는 왈드 검정이 조금 더 높은 값을 갖는 것을 확인 할 수 있었다.

독립변수를 연속형 변수 1개와 범주형 변수 1개를 고려했을 때의 제 1종 오류율에 대한 모의실험 결과는 표 5에 나타나 있다. 이 경우 표 3와 마찬가지로 표본의 크기가 작고 연속형 변수가 균등분포를 따르는 경우에는 스코어, 왈드, 우도비 검정에 비해 χ^2 과 D^2 검정 방법의 값이 유의수준에 조금 더 가까운 값을 갖는다는 것을 확인 할 수 있었다. 그러나 대부분 다섯 가지 검정 방법에서 거의 비슷한 결과를 보였다. 두 개의 독립변수 모두 비례오즈 가정을 만족하지 않을 경우의 검정력은 표 6, 독립변수 중 연속형 변수만 비례오즈 가정을 만족하지 않을 경우의 검정력은 표 7, 범주형 변수만 비례오즈 가정을 만족하지 않을 경우의 검정력은 표 8에서 나타내고 있다. 표 6은 표 4의 결과 보다 검정력의 값이 약간 작은 값을 갖지만 비슷한 경향을 보였고, 표 7의 경우 왈드 검정방법이 다른 검정 방법에 비해 검정력이 조금 더 높게 나왔음을 확인 할 수 있었다. 그러나 표 8의 결과를 보면 범주형 독립변수만 비례오즈 가정을 만족하지 않게 설정하였을 때 검정력은 대부분 매우 낮음을 알 수 있다. 즉 범주형 독립변수가 비례오즈 가정을 만족하지 않을 때 만족하지 않다고 찾아낼 확률이 매우 작다는 것으로 비례오즈 가정이 성립하지 않는 경우에 이를 잘 판별하지 못한다는 것을 확인 할 수 있었다.

종속변수의 범주가 4개이고 독립변수를 연속형 변수 1개만 고려했을 때 제 1종 오류율에 대한 모의실험 결과는 표 9에 나타나 있다. 다섯 가지 검정 방법 중 χ^2 과 D^2 검정이 조금 더 유의수준에 가까운 값을 가지는 것으로 보였으나, 나머지 세 개의 검정방법도 모두 비슷한 값을 갖는 것을 알 수 있었다. 검정력은 표 10에 나타나 있는데 이 경우 스코어, 왈드, 우도비 검정 방법의 경우 나머지 두 개의 검정력에 비해 높게 나오는 것을 알 수 있었다.

독립변수를 연속형 변수 1개와 범주형 변수 1개를 고려했을 때 제 1종 오류율과 검정력은 표 11 ~ 표 14에 나타나 있다. 제 1종 오류율은 표 9의 결과와 마찬가지로 χ^2 과 D^2 검정 방법이 조금 더 유의수준에 가까운 값을 갖는 것을 알 수 있었고, 검정력은 χ^2 과 D^2 검정 방법에 비해 스코어, 왈드, 우도비 검정 방법이 더 높게 나타났다. 종속변수의 범주가 3개일 때와 마찬가지로 χ^2 과 D^2 검정 방법은 두 개의 독립변수중 하나만 비례오즈 가정이 성립되지 않다고 가정한 경우의 모의실험 결과에서 굉장히 낮은 검정력을 보였고, 특히 범주형 독립변수의 비례오즈 가정이 성립되지 않을 경우 모의실험에서 거의 유의수준과 비슷한 검정력을 갖는 것을 확인 할 수 있었다.

종속변수가 3개일 경우와 4개일 경우 모두 범주형 독립변수가 비례오즈 가정이 성립되지 않을 때 검정력이 매우 낮아 비례오즈 가정의 실제적 유의성을 평가하기 위해 제안된 방법인 graphical 방법을 이용하였다. 1000번 반복한 모의실험에서 비례오즈 가정을 만족한다는 결과의 data set 하나를 선택하여 plot을 그려보았다. 결과는 그림 1 ~ 그림 8에 나타나 있다. 비례오즈 가정을 만족하는 모형에 대한 모의실험에서 plot은 reference plot과 비슷한 선형성을 보이고 있고 plot의 기울기도 1에 가까운 것을 확인 할 수 있다. 범주형 독립변수가 비례오즈 가정을 만족하지 않은 경우에서 다섯 가지 검정 방법에 대한 검정력이 매우 낮게 나와 비례오즈 가정을 따르지 않는다는 것을 잘 판별하지 못하는 것으로 나타났지만, plot을 reference plot과 비교해 보면 기울기는 1에 가까우나 reference plot에 비해 상대적으로 약간 더 넓게 퍼져 있는 것을 확인 할 수 있었다.

표 3. 모형 1에서 $\theta=0$ 일 때, 종속변수 범주가 3개인 경우 제 1종 오류율

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 400$			$n = 800$		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$x \sim U(0,10)$												
스코어 검정	1.5	5.3	9.9	1.1	5.1	10.7	1.6	5.7	10.1	1.0	5.0	11.7
왈드 검정	1.6	5.5	10.0	1.1	5.4	10.5	1.6	5.7	10.1	1.0	5.0	11.7
우도비 검정	1.3	5.2	9.8	1.1	5.0	10.4	1.7	5.6	10.1	1.0	5.0	11.6
χ^{*2} 검정	1.4	6.9	11.6	0.8	5.6	12.6	1.0	6.0	12.3	1.1	5.5	11.0
D^{*2} 검정	1.5	7.3	12.2	0.9	5.9	12.6	1.0	6.0	12.2	1.1	5.6	10.9
$x \sim N(5,3)$												
스코어 검정	1.4	5.4	9.8	0.8	4.6	10.0	1.1	4.9	9.8	1.2	5.3	10.6
왈드 검정	1.7	5.9	10.0	1.4	5.2	10.6	1.3	5.1	10.3	1.3	5.4	10.6
우도비 검정	1.5	5.6	9.8	0.8	4.7	10.1	1.1	5.0	9.9	1.2	5.1	10.5
χ^{*2} 검정	1.7	7.2	13.8	1.7	6.3	13.5	1.1	6.5	13.7	1.1	6.1	12.4
D^{*2} 검정	1.7	7.1	13.6	1.8	6.3	13.6	1.1	6.5	13.8	1.1	6.2	12.1

표 4. 모형 1에서 $\theta = 0.2$ 일 때, 종속변수 범주가 3개인 경우 검정력

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 400$			$n = 800$		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$x \sim U(0,10)$												
스코어 검정	27.1	48.9	58.7	53.7	75.0	83.6	87.7	96.0	97.7	99.6	100.0	100.0
왈드 검정	26.5	48.2	58.3	53.0	74.4	83.2	87.5	96.0	97.6	99.6	100.0	100.0
우도비 검정	24.2	45.9	57.6	50.4	73.1	82.5	86.9	95.9	97.5	99.6	100.0	100.0
χ^{*2} 검정	19.2	38.9	50.1	41.3	66.5	76.6	74.1	89.2	92.8	97.1	99.5	99.9
D^{*2} 검정	17.7	38.0	49.3	39.5	66.0	75.9	72.9	88.9	92.5	97.1	99.5	99.9
$x \sim N(5,3)$												
스코어 검정	9.2	20.2	29.7	16.5	35.6	49.0	37.8	62.0	75.1	75.3	91.6	96.2
왈드 검정	10.2	21.0	30.3	17.2	36.1	49.7	38.7	62.6	75.3	75.7	91.6	96.3
우도비 검정	8.9	19.8	28.9	16.2	34.9	48.0	36.9	61.3	74.9	74.9	91.5	96.3
χ^{*2} 검정	5.5	18.5	27.8	10.9	26.8	40.2	25.0	49.0	62.1	53.1	75.1	84.2
D^{*2} 검정	5.3	18.6	27.5	10.6	26.5	39.7	24.9	48.6	61.9	52.5	74.8	84.0

표 5. 모형 2에서 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 일 때, 종속변수 범주가 3개인 경우 제 1종 오류율

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 400$			$n = 800$		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$x \sim U(0,10); d \sim Bernoulli(0.5)$												
스코어 검정	1.9	7.0	14.0	1.9	6.0	10.9	1.7	6.2	11.4	0.9	5.7	10.8
왈드 검정	2.0	6.7	14.3	1.8	6.0	11.3	1.7	6.4	11.1	0.9	5.9	10.7
우도비 검정	1.9	6.4	12.8	1.8	5.7	10.7	1.4	6.1	11.0	0.9	5.8	10.7
χ^{*2} 검정	0.9	5.9	10.5	1.0	5.0	10.5	1.0	4.8	9.1	1.2	4.7	10.3
D^{*2} 검정	1.1	5.8	11.0	1.1	5.4	10.9	1.5	4.8	10.2	1.4	4.9	10.2
$x \sim N(5,3); d \sim Bernoulli(0.5)$												
스코어 검정	1.7	7.2	12.4	1.1	5.5	10.9	0.9	4.8	10.6	1.1	4.8	9.5
왈드 검정	1.7	7.6	12.8	1.3	5.4	11.8	1.0	5.2	10.8	1.1	5.1	9.6
우도비 검정	1.3	7.1	12.0	1.0	5.4	10.8	0.9	4.7	10.6	1.1	4.6	9.5
χ^{*2} 검정	1.7	6.7	13.7	1.5	6.3	12.6	1.4	6.7	11.6	1.1	5.9	10.2
D^{*2} 검정	1.4	6.7	13.7	1.6	6.7	12.6	1.4	6.9	12.2	1.0	6.0	10.4

표 6. 모형 2에서 $\theta_1 = \theta_2 = 0.2$ 일 때, 종속변수 범주가 3개인 경우 검정력

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 400$			$n = 800$		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$x \sim U(0,10); d \sim Bernoulli(0.5)$												
스코어 검정	19.0	35.5	46.9	39.6	63.8	72.8	73.5	89.3	93.6	96.9	99.5	99.7
왈드 검정	16.6	32.8	43.9	38.5	62.3	72.1	72.9	89.2	93.5	96.7	99.5	99.7
우도비 검정	16.0	32.5	44.4	35.6	59.9	70.8	70.8	88.0	93.2	96.4	99.4	99.7
χ^{*2} 검정	9.2	25.6	35.1	22.0	42.3	54.4	47.4	69.3	79.6	82.8	95.2	97.6
D^{*2} 검정	4.2	13.5	19.7	17.4	37.3	49.3	43.1	67.9	77.9	80.8	94.7	97.5
$x \sim N(5,3); d \sim Bernoulli(0.5)$												
스코어 검정	5.2	15.8	25.5	11.6	27.9	38.9	28.1	52.3	63.5	54.6	78.7	87.7
왈드 검정	4.6	15.6	23.9	12.1	28.1	39.3	29.0	52.1	63.7	54.6	78.9	87.8
우도비 검정	5.4	15.8	25.5	11.2	27.8	38.6	27.5	52.3	62.9	54.4	78.4	87.6
χ^{*2} 검정	2.2	10.1	19.3	4.8	17.5	25.9	11.9	30.2	42.3	28.6	53.4	66.4
D^{*2} 검정	0.6	5.1	9.1	4.3	15.9	24.3	11.9	30.0	42.2	27.5	52.2	65.3

표 7. 모형 2에서 $\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0$ 일 때, 종속변수 범주가 3개인 경우 검정력

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 400$			$n = 800$		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$x \sim U(0,10); d \sim Bernoulli(0.5)$												
스코어 검정	20.8	36.8	47.6	41.6	63.3	73.9	75.3	90.7	94.6	97.3	99.1	99.4
왈드 검정	23.7	42.2	53.4	49.4	70.5	80.0	82.1	94.0	97.1	98.2	99.4	99.8
우도비 검정	21.1	40.2	51.3	46.1	69.0	78.9	80.5	93.5	96.9	98.1	99.3	99.7
χ^2 검정	9.9	25.7	37.3	20.6	42.8	56.0	47.3	69.8	79.9	85.7	95.0	97.2
D^{*2} 검정	4.9	15.7	23.7	17.4	39.6	52.6	43.2	67.3	77.7	84.1	94.5	96.9
$x \sim N(5,3); d \sim Bernoulli(0.5)$												
스코어 검정	6.0	17.4	25.0	11.3	27.4	40.7	27.2	49.0	61.7	53.1	79.1	87.1
왈드 검정	8.7	20.4	29.6	17.3	36.4	46.5	36.7	59.4	70.0	65.8	85.9	92.5
우도비 검정	7.5	19.5	29.0	15.9	34.6	45.4	35.1	58.3	69.4	63.6	85.6	92.3
χ^2 검정	3.2	11.8	20.0	4.2	16.2	26.9	11.1	27.3	40.6	26.8	49.8	62.8
D^{*2} 검정	2.0	8.6	14.5	4.3	15.1	25.6	10.9	27.6	39.7	25.5	49.1	61.9

표 8. 모형 2에서 $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0.2$ 일 때, 종속변수 범주가 3개인 경우 검정력

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 400$			$n = 800$		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$x \sim U(0,10); d \sim Bernoulli(0.5)$												
스코어 검정	2.5	8.6	14.9	2.6	9.5	15.8	3.2	10.5	18.7	5.9	16.3	25.8
왈드 검정	1.7	7.4	13.3	2.5	9.6	15.5	3.6	12.9	21.2	7.6	19.8	30.3
우도비 검정	2.6	8.0	14.4	2.7	9.9	15.7	3.9	13.1	21.0	7.8	19.9	30.5
χ^{*2} 검정	1.1	6.6	13.1	1.3	8.4	15.4	2.4	9.3	17.4	5.0	14.4	22.9
D^{*2} 검정	1.4	6.4	12.9	1.4	8.7	16.0	2.8	9.9	17.9	5.0	14.6	23.1
$x \sim N(5,3); d \sim Bernoulli(0.5)$												
스코어 검정	2.3	7.8	13.7	2.2	9.1	14.1	3.4	12.3	21.8	5.4	18.3	27.1
왈드 검정	1.5	7.4	14.9	2.5	10.6	16.6	4.7	15.5	24.2	7.9	22.2	34.6
우도비 검정	1.8	8.1	15.3	2.7	11.1	16.7	5.0	15.8	24.7	8.2	22.4	34.8
χ^{*2} 검정	1.8	7.9	15.2	2.5	10.1	16.6	4.0	10.8	18.5	5.2	17.2	25.8
D^{*2} 검정	1.8	7.6	15.7	2.6	10.3	17.3	4.2	11.2	18.8	5.4	17.4	26.4

표 9. 모형 3에서 $\theta = 0$ 일 때, 종속변수 범주가 4개인 경우 제 1종 오류율

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 400$			$n = 800$		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$x \sim U(0,10)$												
스코어 검정	1.6	5.5	11.5	1.2	5.3	11.1	1.0	4.7	9.8	0.9	5.1	9.9
왈드 검정	1.5	5.5	11.2	1.2	5.6	11.2	1.2	4.9	9.9	0.9	5.1	9.9
우도비 검정	1.5	5.4	11.6	0.9	4.5	10.5	0.9	4.4	9.9	0.9	5.0	10.2
χ^{*2} 검정	1.3	6.0	11.9	1.1	5.6	11.5	1.2	5.5	10.7	1.0	5.3	10.1
D^{*2} 검정	1.4	6.8	12.5	1.3	6.0	11.9	1.3	5.7	10.8	1.1	5.3	10.4
$x \sim N(5,3)$												
스코어 검정	1.6	5.5	10.9	1.4	5.4	10.7	1.3	5.0	10.5	1.1	4.8	9.3
왈드 검정	1.7	5.8	11.8	1.6	5.3	12.4	1.5	5.2	11.2	1.3	5.5	9.7
우도비 검정	1.6	5.6	11.6	1.7	5.6	10.5	1.1	5.1	10.3	1.0	4.8	9.3
χ^{*2} 검정	1.8	6.5	12.5	1.7	6.4	12.3	1.3	5.8	11.5	1.1	5.5	10.7
D^{*2} 검정	1.8	6.7	13.0	1.8	6.5	12.8	1.3	5.8	11.8	1.1	5.6	10.6

표 10. 모형 3에서 $\theta = 0.2$ 일 때, 종속변수 범주가 4개인 경우 검정력

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 400$			$n = 800$		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$x \sim U(0,10)$												
스코어 검정	29.4	50.4	61.7	61.8	79.3	87.1	93.1	98.1	99.2	100.0	100.0	100.0
왈드 검정	28.4	50.0	60.6	62.0	79.2	87.0	93.1	98.1	99.2	100.0	100.0	100.0
우도비 검정	27.0	47.9	60.5	58.8	77.7	86.7	92.2	97.9	99.1	99.9	100.0	100.0
χ^2 검정	21.5	41.1	54.5	42.7	68.9	79.4	81.1	93.6	96.5	99.4	99.9	99.9
D^{*2} 검정	19.6	38.2	52.0	41.8	67.8	78.8	80.9	93.4	96.3	99.4	99.9	99.9
$x \sim N(5,3)$												
스코어 검정	9.8	21.6	30.6	18.1	39.0	52.2	43.0	67.3	78.7	83.4	94.0	96.2
왈드 검정	11.8	23.1	31.6	21.3	41.5	53.5	45.3	67.9	79.3	83.9	94.1	96.3
우도비 검정	9.8	21.3	29.1	17.8	38.3	52.1	42.2	67.3	78.3	83.3	93.9	96.3
χ^2 검정	6.3	19.5	29.6	12.3	29.7	41.7	25.5	49.4	62.3	58.4	80.5	87.6
D^{*2} 검정	6.4	19.4	29.1	12.5	29.2	41.8	25.2	49.0	62.2	57.8	80.4	87.3

표 11. 모형 4에서 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 일 때, 종속변수 범주가 4개인 경우 제 1종 오류율

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 400$			$n = 800$		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$x \sim U(0,10); d \sim Bernoulli(0.5)$												
스코어 검정	2.0	6.7	11.7	1.7	5.9	10.5	1.5	5.3	10.4	1.2	5.1	10.3
왈드 검정	2.1	6.0	11.3	1.8	5.9	11.3	1.6	5.5	10.7	1.2	5.3	10.2
우도비 검정	2.0	5.8	10.6	1.5	5.1	10.4	1.2	5.0	10.3	1.1	5.1	10.1
χ^{*2} 검정	1.5	5.7	10.5	1.2	5.4	10.4	1.1	5.1	10.3	1.0	5.0	10.2
D^{*2} 검정	1.3	5.5	10.9	1.3	5.6	10.7	1.2	5.4	10.5	0.9	5.2	10.5
$x \sim N(5,3); d \sim Bernoulli(0.5)$												
스코어 검정	2.3	6.5	11.1	1.5	5.9	10.8	1.0	5.4	10.3	1.0	5.2	10.2
왈드 검정	2.1	6.1	10.9	1.7	6.0	10.8	1.3	5.7	10.5	1.1	5.4	10.4
우도비 검정	2.0	5.6	10.8	1.2	5.6	10.5	0.9	5.4	10.3	1.0	5.0	10.1
χ^{*2} 검정	1.5	6.1	10.5	1.4	6.2	11.4	1.3	6.0	11.2	1.1	4.9	10.5
D^{*2} 검정	1.1	5.8	10.5	1.5	6.7	12.0	1.4	6.3	11.5	1.1	5.1	10.7

표 12. 모형 4에서 $\theta_1 = \theta_2 = 0.2$ 일 때, 종속변수 범주가 4개인 경우 검정력

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 400$			$n = 800$		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$x \sim U(0,10); d \sim Bernoulli(0.5)$												
스코어 검정	23.0	42.1	55.0	48.8	70.1	79.3	89.5	96.9	98.5	99.9	99.9	100.0
왈드 검정	20.2	38.4	51.9	48.6	69.8	79.0	89.5	96.9	98.5	99.9	99.9	100.0
우도비 검정	21.7	41.3	54.1	45.6	68.9	78.1	89.0	96.6	98.4	99.9	99.9	100.0
χ^{*2} 검정	9.5	25.0	36.5	24.8	47.4	59.9	59.7	80.8	89.2	95.4	98.8	99.8
D^{*2} 검정	5.4	10.6	17.4	20.4	40.1	52.8	59.2	79.4	88.2	95.5	98.9	99.7
$x \sim N(5,3); d \sim Bernoulli(0.5)$												
스코어 검정	10.3	22.4	33.2	14.2	30.6	42.1	34.7	57.4	69.2	75.7	90.9	94.2
왈드 검정	6.7	18.7	29.2	16.4	31.9	42.9	36.6	58.6	70.5	76.6	91.1	94.3
우도비 검정	11.1	23.2	34.1	14.0	30.7	42.2	34.5	57.0	68.6	75.1	90.8	94.1
χ^{*2} 검정	2.5	10.6	19.5	6.2	18.1	29.5	12.7	31.3	45.3	41.9	64.5	75.6
D^{*2} 검정	2.1	6.6	10.5	4.6	16.3	25.9	13.5	32.5	46.5	41.9	64.9	75.7

표 13. 모형 4에서 $\theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0$ 일 때, 종속변수 범주가 4개인 경우 검정력

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 400$			$n = 800$		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$x \sim U(0,10); d \sim Bernoulli(0.5)$												
스코어 검정	24.0	45.3	58.1	48.9	73.6	82.4	89.4	96.7	98.1	99.7	99.9	99.9
왈드 검정	29.9	52.8	64.9	63.6	81.8	88.0	95.0	98.5	99.0	99.9	100.0	100.0
우도비 검정	29.1	52.1	64.0	61.3	81.1	87.6	94.4	98.5	99.0	99.9	100.0	100.0
χ^{*2} 검정	10.6	26.2	38.4	25.9	50.3	63.2	63.5	82.1	89.8	96.2	98.9	99.7
D^{*2} 검정	5.6	15.0	24.8	23.0	46.7	57.7	62.1	81.6	89.5	96.1	98.9	99.7
$x \sim N(5,3); d \sim Bernoulli(0.5)$												
스코어 검정	9.0	21.9	31.1	12.4	30.5	41.7	34.4	56.3	68.2	73.2	89.1	93.1
왈드 검정	9.6	26.3	36.5	19.7	39.3	51.1	47.1	67.2	77.0	84.2	93.1	96.7
우도비 검정	9.5	24.7	35.9	17.3	36.7	49.1	44.5	66.0	76.0	83.3	92.9	96.7
χ^{*2} 검정	3.3	12.7	21.8	5.6	16.4	27.6	12.9	29.6	43.8	35.1	58.2	70.9
D^{*2} 검정	2.1	9.2	17.3	5.6	15.7	26.5	11.1	30.1	44.6	35.4	58.7	71.2

표 14. 모형 4에서 $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0.2$ 일 때, 종속변수 범주가 4개인 경우 검정력

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 400$			$n = 800$		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
$x \sim U(0,10); d \sim Bernoulli(0.5)$												
스코어 검정	2.5	9.7	16.8	2.7	10.5	17.0	3.5	11.1	19.9	6.0	17.4	28.4
왈드 검정	2.0	7.8	14.0	2.6	10.1	16.6	4.3	14.2	21.9	7.9	21.2	34.2
우도비 검정	2.2	8.3	14.9	3.0	10.6	17.2	4.2	14.5	22.2	8.2	21.2	34.3
χ^{*2} 검정	1.5	6.7	13.7	1.9	8.1	15.3	2.6	9.7	18.2	5.4	14.9	24.2
D^{*2} 검정	1.4	5.8	12.9	2.0	8.9	15.8	2.8	10.1	18.7	5.4	15.9	24.9
$x \sim N(5,3); d \sim Bernoulli(0.5)$												
스코어 검정	2.3	8.6	14.4	2.6	9.5	15.8	3.5	11.2	20.5	7.4	19.1	29.0
왈드 검정	1.8	7.6	11.5	2.4	10.0	14.8	4.5	15.9	21.8	8.5	23.3	35.4
우도비 검정	1.8	7.9	12.4	2.9	10.2	16.2	4.4	15.9	22.0	8.7	23.5	35.5
χ^{*2} 검정	1.8	7.3	15.6	2.8	10.2	16.7	4.0	10.7	18.0	5.8	16.9	25.0
D^{*2} 검정	1.5	6.8	14.5	3.0	10.3	17.0	4.1	11.2	18.9	5.9	14.7	25.6

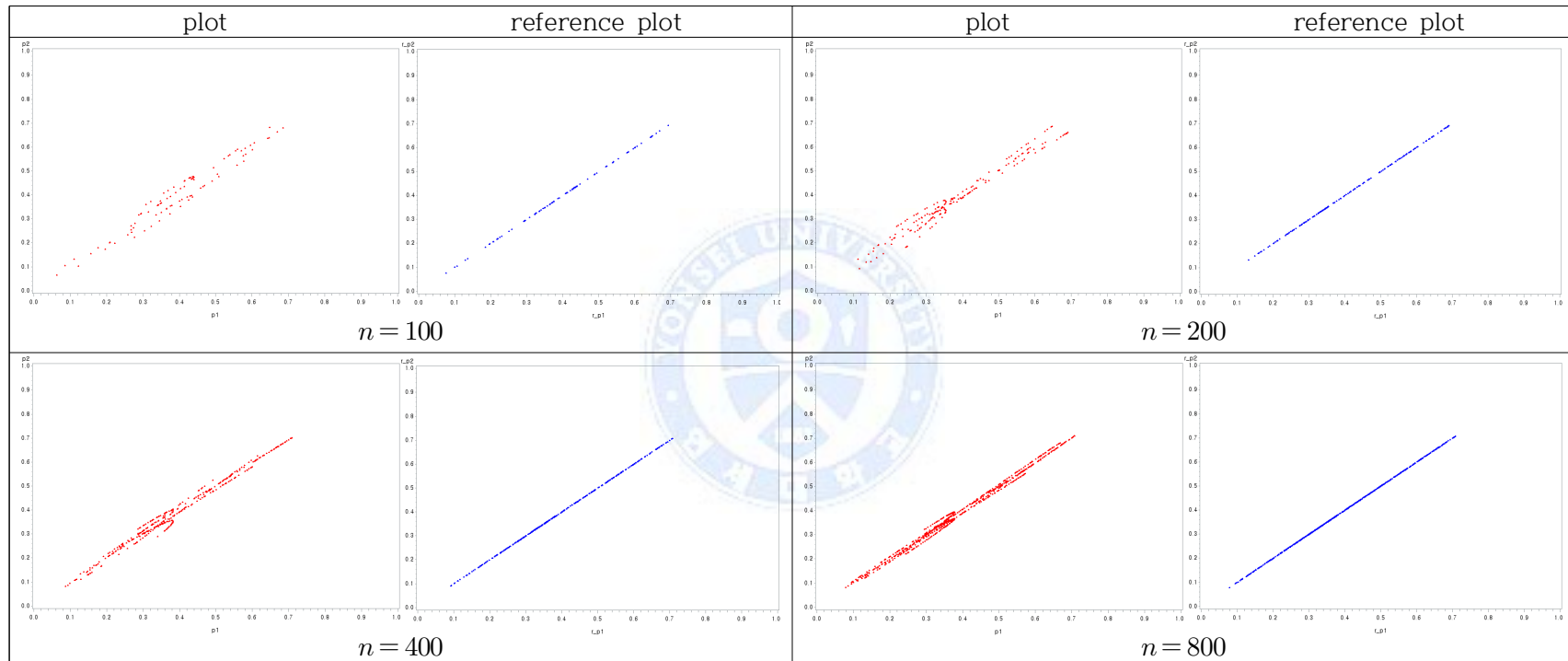


그림 1. 표 6의 $x \sim U(0,10)$ 경우 각각의 모의실험에서 선택된 하나의 자료에 대한 plot과 reference plot

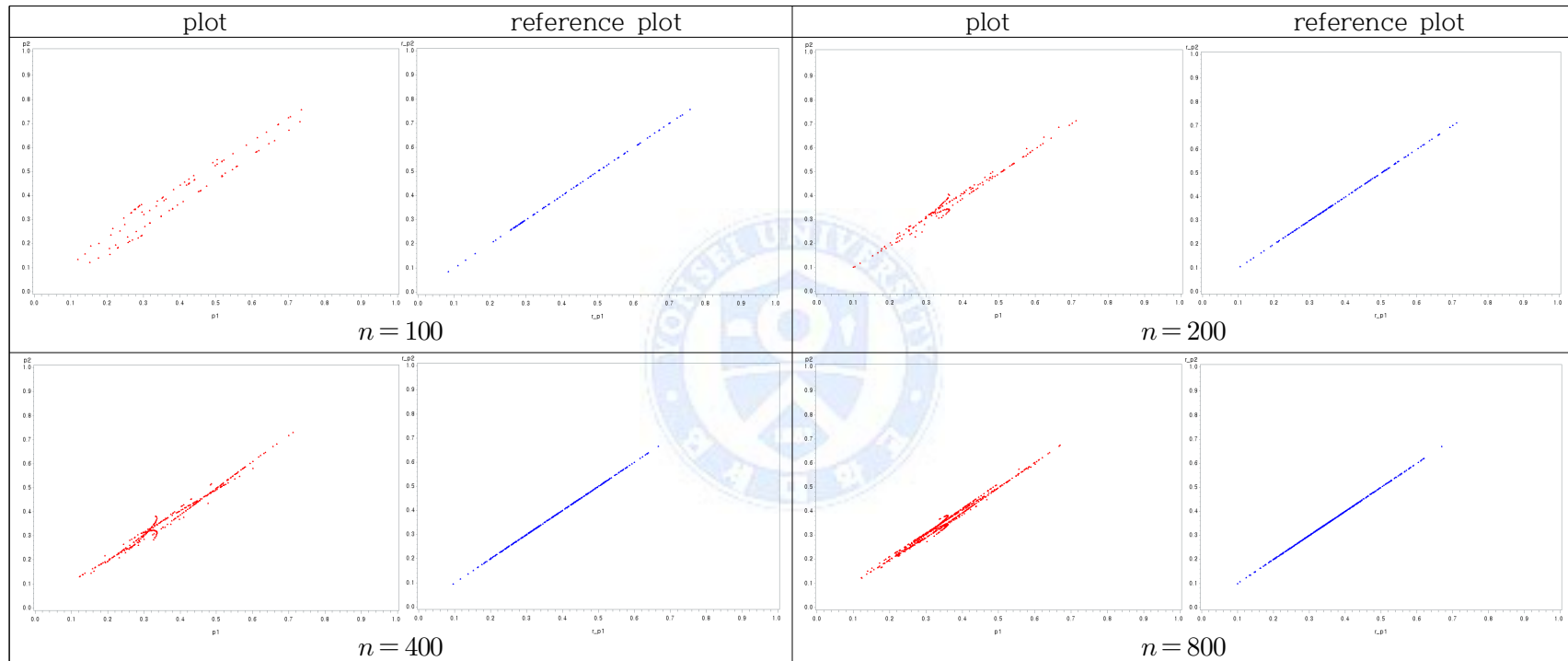


그림 2. 표 6의 $x \sim N(5,3)$ 경우 각각의 모의실험에서 선택된 하나의 자료에 대한 plot과 reference plot

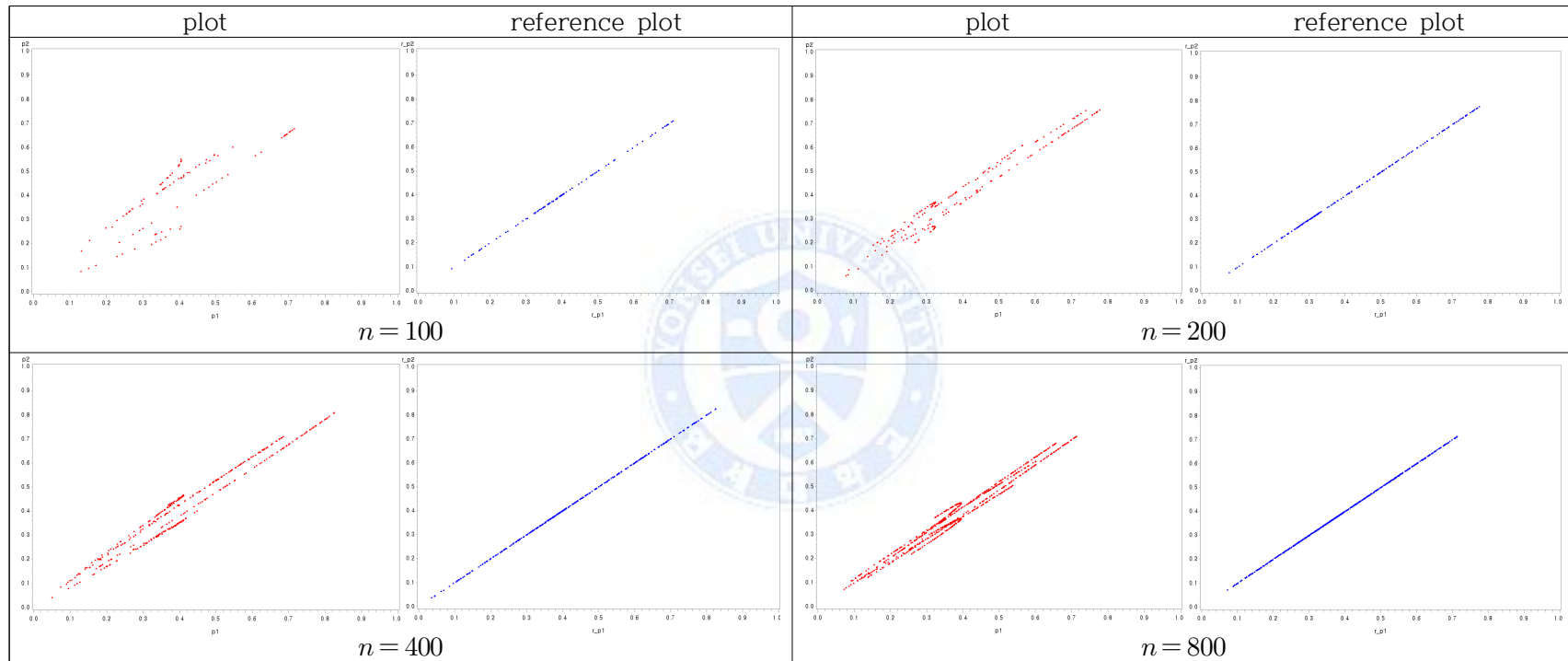


그림 3. 표 7의 $x \sim U(0,10)$ 경우 각각의 모의실험에서 선택된 하나의 자료에 대한 plot과 reference plot

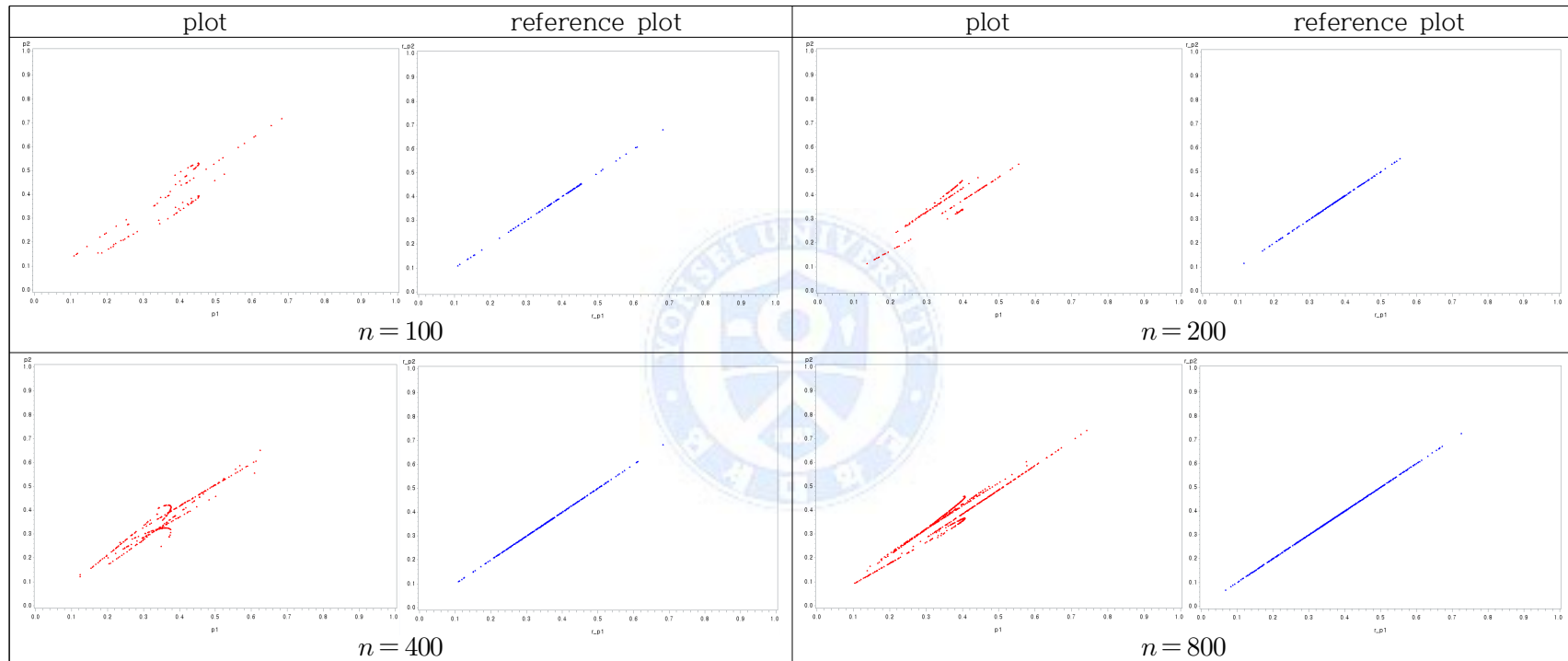


그림 4. 표 7의 $x \sim N(5,3)$ 경우 각각의 모의실험에서 선택된 하나의 자료에 대한 plot과 reference plot

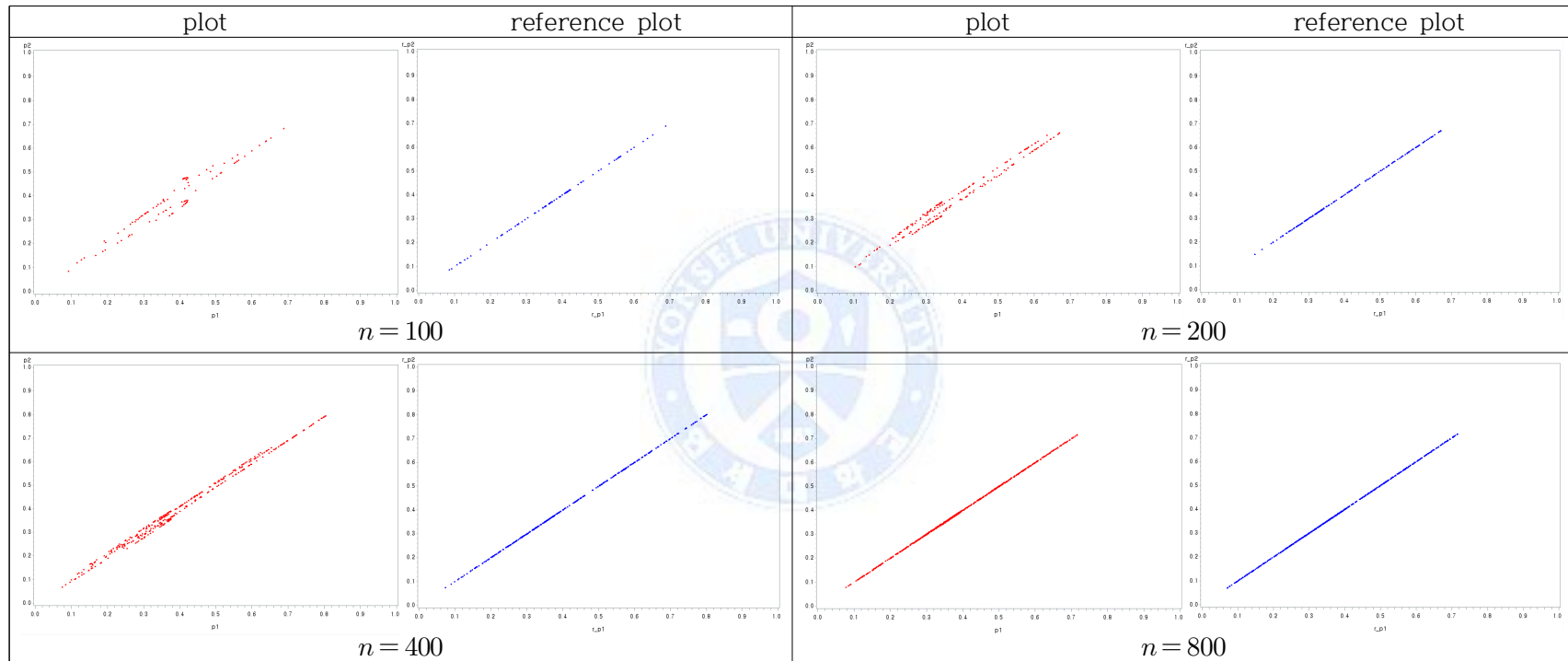


그림 5. 표 12의 $x \sim U(0,10)$ 경우 각각의 모의실험에서 선택된 하나의 자료에 대한 plot과 reference plot

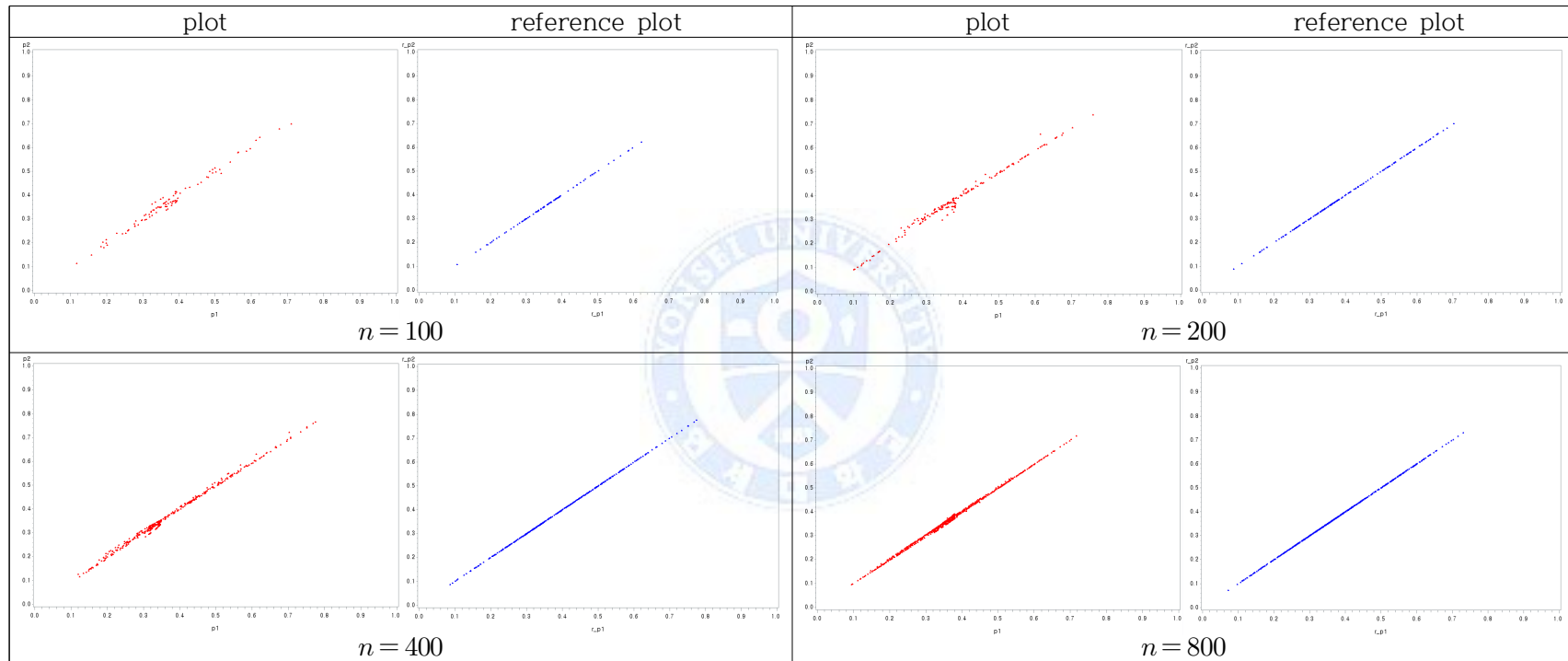


그림 6. 표 12의 $x \sim N(5,3)$ 경우 각각의 모의실험에서 선택된 하나의 자료에 대한 plot과 reference plot

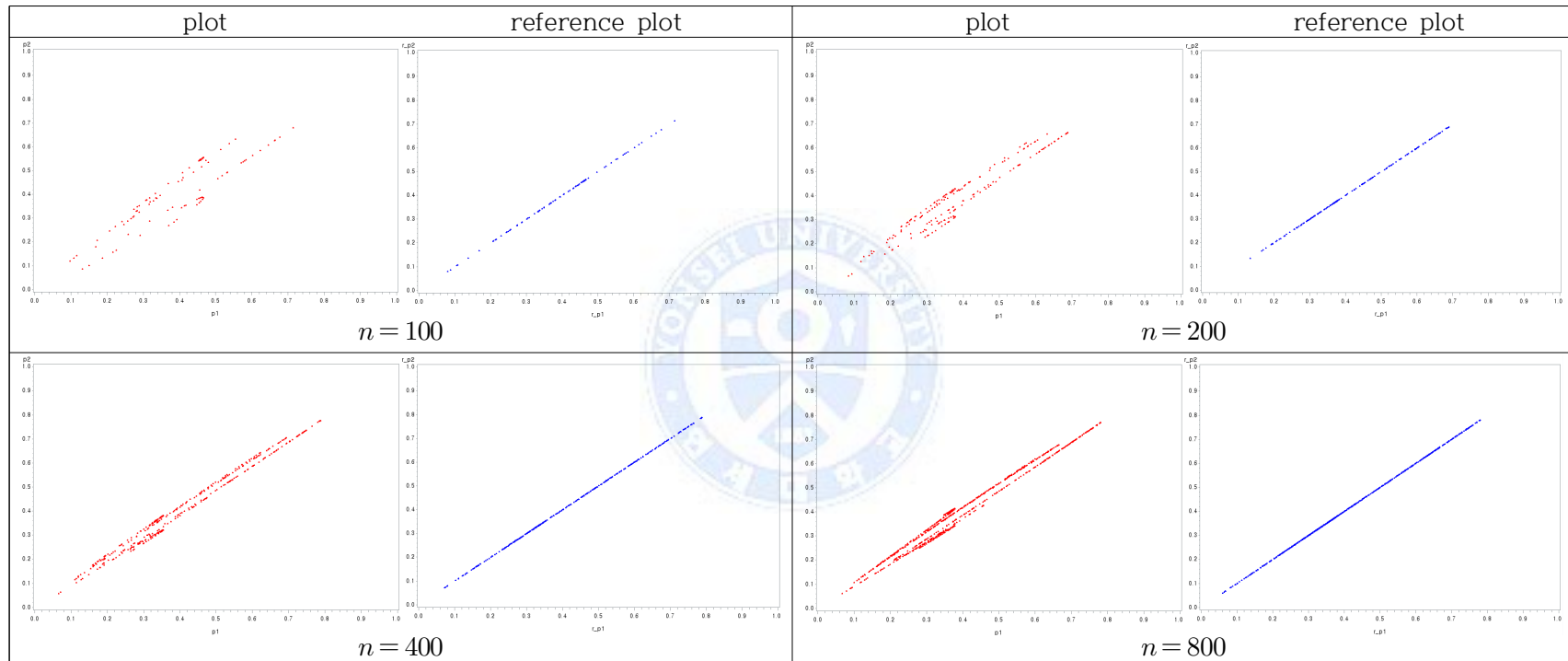


그림 7. 표 15의 $x \sim U(0,10)$ 경우 각각의 모의실험에서 선택된 하나의 자료에 대한 plot과 reference plot

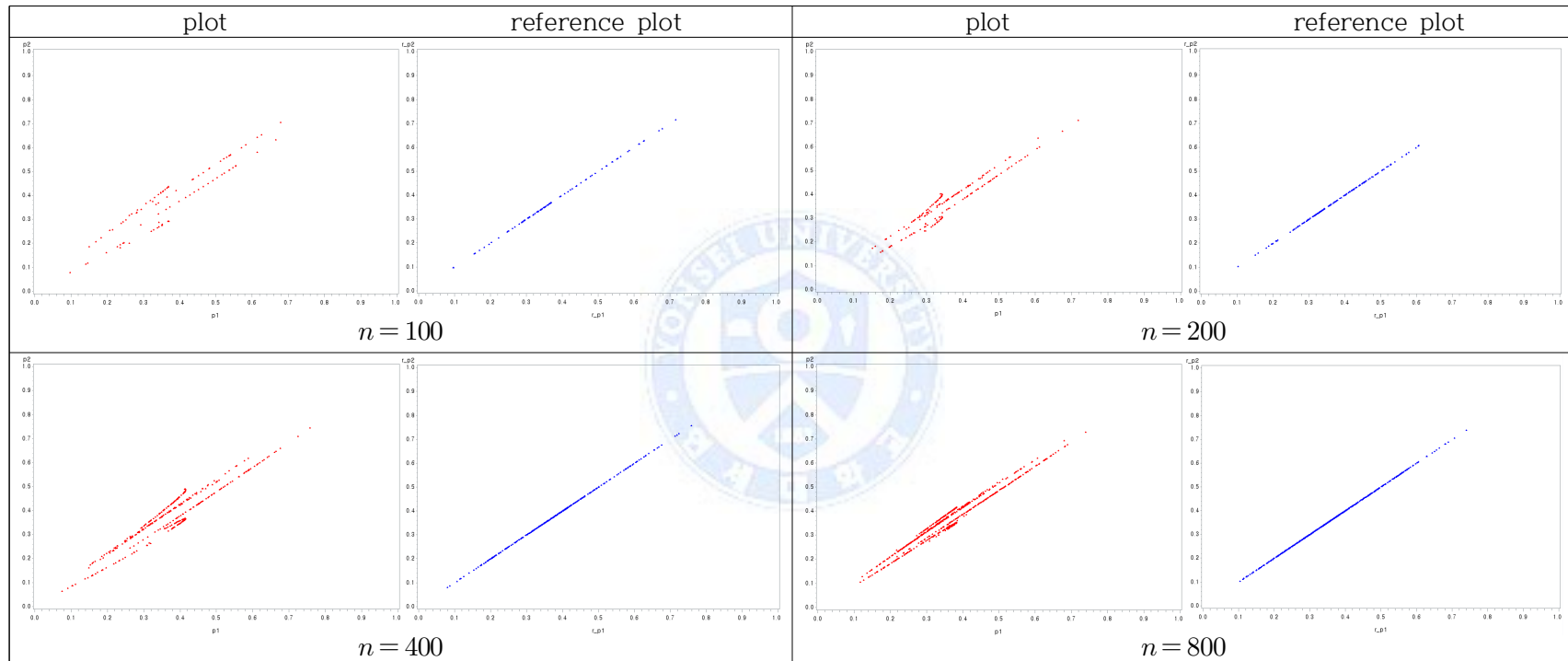


그림 8. 표 15의 $x \sim N(5,3)$ 경우 각각의 모의실험에서 선택된 하나의 자료에 대한 plot과 reference plot

제 4장 실제자료 분석

이 장에서는 녹내장(glaucoma)자료를 사용하여 제 2장에서 설명한 비례오즈 가정 검정에 대한 네 가지 검정 방법과 graphical 방법을 적용하여 결과를 비교하고, 누적로짓 모형을 적용할 수 있는지에 대한 여부를 확인해 보고자 한다.

4.1 자료 설명

녹내장(glaucoma)은 안압의 상승으로 인해 시신경이 눌리거나 혈액 공급에 장애가 생겨 시신경의 기능에 이상을 초래하여 망막 신경 섬유층이 손상되어 두께 감소로 나타나는 질환이다. 이 자료는 우리나라에서 만 23세 이상인 녹내장 검진을 받은 149명을 대상으로 swept source OCT로 촬영한 시신경 주변(peripapillary) 상측 망막신경 섬유층, 하측 망막 신경 섬유층, 외측 망막 신경 섬유층, 내측 망막 신경 섬유층 총 4 구역의 평균 두께(RNFL thickness)에 따라 녹내장을 진단한 결과이다.

본 연구에서는 이 자료를 이용하여 녹내장 진단에 대한 누적로짓 모형을 적용 가능한지 여부를 판단하고자 한다. 이 자료에서 순서를 가진 다항 종속변수는 Group (녹내장 진단)으로 정상, 경증, 중등도 및 중증으로 나누었다. 그리고 독립변수는 임상적으로 중요한 Age (나이), Gender (성별)을 고려하였고, 종속변수에 유의한 영향을 미치는 변수인 SS1_4_S (상측 망막 신경 섬유층 두께)와 SS1_4_I (하측 망막 신경 섬유층 두께)를 포함하였다. 표 15 에는 누적로짓 모형을 적합 시키기 위해 사용된 변수와 변수에 대한 설명이 있다. 그리고 표 16 에는 사용된 변수에 대한 기술통계량이 주어져 있다. 명목형 변수는 표본의 크기, 연속형 변수는 평균±표준편차로 나타내었다.

표 15. 녹내장 자료 변수 설명

변수	유형	변수 설명
Group (녹내장 진단)	명목형	1 = 정상 2 = 경증 녹내장 3 = 중등도 및 중증 녹내장
Age	연속형	연구시작시점나이(만23~83세)
Gender	명목형	1 = 남자 2 = 여자
SS1_4_S	연속형	상측 망막 신경 섬유층 두께 (μm)
SS1_4_I	연속형	하측 망막 신경 섬유층 두께 (μm)

표 16. 녹내장 자료 기술통계량

변수	Group=1 (n=91)	Group=2 (n=32)	Group=3 (n=26)
Age	54.02±15.24	54.63±13.69	54.38±11.32
Gender			
남자	31	12	14
여자	60	20	12
SS1_4_S	132.72±17.50	107.96±24.15	84.34±25.77
SS1_4_I	140.57±18.47	107.53±29.10	69.20±23.86

4.2 분석 결과

녹내장 자료의 결과를 누적로짓 모형에 적합 시키면 회귀계수는 종속변수 각 범주의 누적로짓마다 같은 값을 나타내고 절편은 각 범주의 누적로짓마다 다른 값을 갖는 것을 표 17에서 확인 할 수 있다. 또한 회귀계수, 표준오차 그리고 각 변수의 월드 통계량과 p 값도 확인 할 수 있다.

표 17. 녹내장 자료의 누적로짓 회귀모형

변수	회귀계수	표준오차	왈드 통계량	p 값
상수 1	-11.3090	1.8623	36.8785	<0.0001
상수 2	-7.9739	1.5359	26.9535	<0.0001
Age	-0.0017	0.0167	0.0103	0.9192
Gender	-0.3842	0.2482	2.3964	0.1216
SS1_4_S	0.0317	0.0126	6.3627	0.0117
SS1_4_I	0.0706	0.0121	34.2832	<0.0001

표 18는 녹내장 자료를 이용하여 비례오즈 가정을 만족하여 누적로짓 모형을 적용할 수 있는지에 대한 여부를 확인하기 위해 본 논문에서 제시한 다섯 가지 검정방법을 제시하였다. 결과를 확인해 보면 스코어, 왈드, 우도비 검정 방법과 χ^{*2} , D^{*2} 검정 방법의 결과가 상반되게 나온 것을 알 수 있다. 즉, 이 자료를 가지고 스코어, 왈드, 우도비 검정을 한 결과로 해석을 하면 “이 자료는 비례오즈 가정을 만족하지 않는다.”가 된다. 반대로 χ^{*2} 과 D^{*2} 검정을 이용한 결과로 해석을 하면 “이 자료는 비례오즈 가정을 만족한다.”이다.

표 18. 녹내장 자료에서 비례오즈 가정 검정

검정 방법	검정 통계량	자유도	p 값
스코어 검정	12.72	4	0.0127
왈드 검정	11.15	4	0.0250
우도비 검정	14.43	4	0.0060
χ^{*2} 검정	2.59	2	0.2737
D^{*2} 검정	3.16	2	0.2056

상반된 결과로 인해 정확한 결론을 내리기 어려워 graphical 방법을 이용하였다. 결과는 그림 9에 나타나 있다. 이 그림을 확인해 보면 녹내장 자료에 대한 plot은 기울기가 1을 따르는 것으로 보이기 하나 reference plot에 비해 상대적으로 넓게 퍼져 있는 것을 확인 할 수 있다. 이렇게 두 개의 plot간 차이가 보이는 경우는 비례오즈 가정을 만족한다고 말하기 어렵다. 따라서 통계적 유의성에서 상반된 결과가 나올 경우 실제적 유의성도 함께 확인해보고 적절한 판단을 내려 알맞은 모형을 적합 시키는 것이 중요하다.

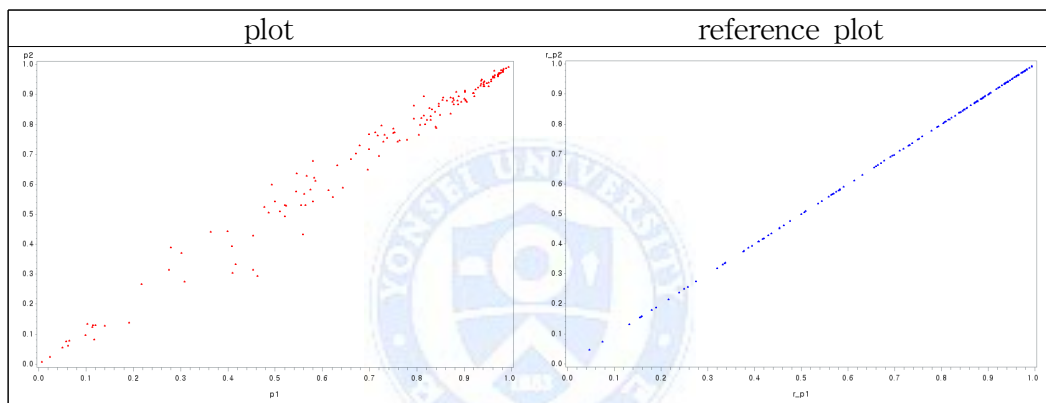


그림 9. 녹내장 자료에 대한 graphical 방법 결과

제 5장 결론 및 고찰

본 연구에서는 종속변수가 범주형이고 이때 범주가 3개 이상이면서 순서를 가진 다항 종속변수의 경우 종속변수의 각 범주의 누적확률에 대해 독립변수들의 효과가 동일하다는 비례오즈 가정을 만족하여 누적로짓 모형을 적용할 수 있는지에 대한 여러 가지 검정방법을 알아보고, 모의실험을 통해 비교하고 실제자료에 적용시켜 보았다.

모의실험 결과 종속변수의 범주가 3개 그리고 4개인 경우 제 1종 오류율은 다섯 가지 방법 모두 비슷한 값을 가지기는 하나 특히 표본의 크기가 작을 경우 χ^2 과 D^2 검정에 비해 스코어, 왈드, 우도비 검정이 약간 높은 값을 갖는 것을 확인 할 수 있었다. 검정력은 대부분 스코어, 왈드, 우도비 검정 방법이 χ^2 과 D^2 검정 방법에 비해 높게 나왔다. 그리고 연속형 독립변수가 정규분포인 경우보다 균등분포인 경우 검정력이 다소 높게 나온 것을 확인 할 수 있었다. 또한 표본의 크기가 증가할수록 제 1종 오류율은 점점 더 유의수준과 가까운 값을 가지는 것을 확인 할 수 있었고, 검정력도 점점 더 큰 값을 갖는 것을 알 수 있었다. 그러나 독립변수중 범주형 변수만 비례오즈 가정을 만족하지 않는 경우는 유의수준 정도의 매우 작은 검정력을 가지는 문제점을 확인 할 수 있었다. 그래서 이 경우 다섯 가지 비례오즈 가정 검정 방법 대신에 실제적 유의성을 평가하기 위해 graphical 방법을 이용해 보았다. 그 결과 다섯 가지 비례오즈 가정 검정에서는 p 값이 0.05보다 커 비례오즈 가정을 만족하는 결론을 내린 data 이지만, graphical 방법에서는 plot과 reference plot의 약간의 차이를 보였다. 그러나 이는 연구자의 주관적인 판단일 가능성이 있으므로, 범주형 독립변수가 비례오즈 가정을 만족하지 않는 경우일 때 검정력이 낮은 문제점에 대해 더 많은 연구가 필요하다. 또한 본 연구에서 수행된 모의 실험의 경우 설정된 상황에 대해 제한되어 수행되었기 때문에 더 다양한 상황에서 비례오즈 가정을 검토하는 방법에 대한 연구도 필요할 것이다.

녹내장 자료를 이용한 실제자료 분석에서는 최대우도함수를 이용한 스코어, 왈드, 우도비 검정 방법의 경우 비레오즈 가정을 만족하지 않는다는 결론이 나왔지만 χ^2 과 D^2 검정 방법은 비레오즈 가정을 만족한다는 결론이 나왔다. 상반된 결과로 인해 graphical 방법을 확인해본 결과 이 경우는 plot이 reference plot과 약간의 차이가 있음을 알 수 있었다.

χ^2 과 D^2 검정 방법의 경우 모의실험에서 제 1종 오류율은 유의수준과 비슷한 값을 가지나 검정력이 다소 떨어지는 것을 확인 할 수 있었다. 이 방법은 모형의 적합도 검정방법을 이용한 것으로 모형의 적합도를 검정하기에는 충분히 좋은 통계량일 수 있으나(Pulkstenis와 Robinson, 2004), 비레오즈 가정을 검토하는데 있어서는 많은 주의가 필요하다. 또한, graphical 방법은 시각적인 자료이므로 주관적인 판단을 할 가능성이 있다(Kim, 2002). 그리고 일반적으로 비레오즈 가정을 검토하는데 있어서 스코어 검정 방법이 보편적으로 사용하는데, 그 이유는 왈드 검정과 우도비 검정 방법의 경우 식 (2)의 최대우도함수를 사용해 최대우도추정량을 추정해야하는 어려움이 있기 때문이다(Agresti, 2010, 53-75). 하지만 스코어 검정 방법 하나만을 이용하여 이를 판단하는 것 보다는 왈드 검정, 우도비 검정 모두 확인 해보는 것이 좋으며 graphical 방법도 보충자료로써 추가로 제시되어 더 정확한 판단과 분석을 하는데 도움을 줄 것이라고 여겨진다.

참고 문헌

- Agresti, A. 2007. An introduction to Categorical Data Analysis. 2nd ed. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley: New jersey.
- Agresti, A. 2010. Analysis of Ordinal Categorical Data. 2nd ed. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley: New jersey.
- Brant R. 1990. “Assessing proportionality in the proportional odds model for ordinal logistic regression”. *Biometrics*, 1171-1178.
- Fagerland, M. W. and Hosmer, D. W. 2013. “A goodness of fit test for the proportional odds regression model”. *statistics in medicine*, 32(13):2235-2249.
- McCullagh. P. 1980. “Regressionmodelsforordinaldata”. *Journal of the royal statistical society. Series B (Methodological)*, 109-142.
- Kim, J. H. 2003. “Assessing practical significance of the proportional odds assumption”. *Statistics & Probability Letters*, 65(3):233-239.
- Peterson, B. Harrell, F. E. Jr. 1990. “Partial proportional odds models for ordinal response variables”. *Applied statistics*, 205-217.
- Pulkstenis, E. and Robinson, T. J. 2004 “Goodness-of-fit tests for ordinal response regression models”. *statistics in medicine*, 23(6):999-1014.

Abstract

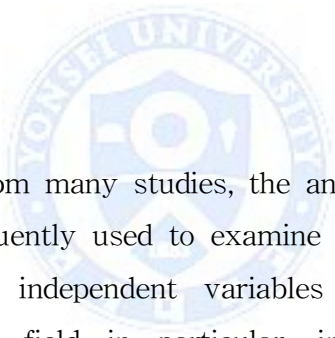
Comparison of methods for assessing the proportional odds assumption in cumulative logit model

Choi, Hyo Jin

Dept. of Biostatistics and Computing

The Graduate School

Yonsei University



Of the data acquired from many studies, the analysis through generalized linear model is most frequently used to examine the inter-relation between continuous or categorial independent variables and categorial response variable. In the medical field in particular, in order to modelize the multinomial response variable having 3 or more categories, such as the worsening, improvement and complete recovery of the disease, the logit—considering the order—is utilized and used for cumulative logit model. The cumulative logit model, because of the nature in having equal effect of independent variables on the cumulative probability of response variable in each category, is called the proportional odds model. In order to apply such cumulative logit model, the hypothesis of the proportional odds must be satisfied. Methods of reviewing this are as follows: score test, likelihood ratio test, Wald test, modified Pearson chi-square(χ^2), deviance test(D^2) suggested by Pulkstenis and Robinson (2004), and graphical method. To

compare the power, the above methods were introduced, type I error rate was verified through simulation, and a situation in which the proportional odds hypothesis is not valid was suggested. In addition, the practical significance in each situation was judged by the graphical method.

As a consequence of the simulation, the type I error rate, in the case of χ^{*2} , D^{*2} test method, had all five methods to be similar despite having a closer number to the significance level. In the case of power, the score, Wald and likelihood ratio test had higher power; the bigger the sample size of all method, the higher the power. However, it was verified that in the case of the categorical independent variable not satisfying the proportional odds hypothesis, the power was shown to be very low. Therefore in such case, graphical method was used to evaluate the practical significance. In the situation that the proportional odds hypothesis did not satisfy, all 5 stat were concluded to satisfy the proportional odds hypothesis, however, because the two plots, plot and reference plot, when compared through the graphical method, showed little difference, implying the difficulty in saying it satisfied the proportional odds hypothesis.

The χ^{*2} , D^{*2} test method has lower power than other test methods, hence requires caution when used for proportional odds hypothesis test. Therefore, it is suggested that all tests—the score, Wald, and likelihood ratio tests— be verified, and because of its need for discretion for possibly making subjective judgment (Kim, 2004), the use of graphical method is considered being helpful for a more precise judging and analyzing when presented as additional supplement.

Key words : ordinal response variable, cumulative probability, cumulative logit model, proportional odds